Institut national
supérieur du professorat
et de l'éducation
Académie de Lille
Hauts-de-France

MASTER 2 MEEF

Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation

Mention **Premier degré**

Année universitaire 2020 - 2021

DOSSIER UE 3 – MEMOIRE DE RECHERCHE

ENSEIGNER ET APPRENDRE LES MATHEMATIQUES A L'ECOLE

SEMESTRE 4
SESSION 1

Prénom et Nom de l'étudiant : Léa FAGEZ

Site de formation : Arras

Section : 4

Nom de l'enseignant : Antonietta DEMURO

Direction
365 bis rue Jules Guesde – BP 50458 – 59658 Villeneuve d'Ascq cedex
inspe-lille-hdf.fr / 03 20 79 86 00

Remerciements

La rédaction de ce mémoire s'est montrée être un exercice plus difficile que je l'avais imaginé et je tenais, avant toute chose, à remercier les personnes qui m'ont accompagnée tout au long de cette aventure, et sans qui je n'aurais pas la fierté de pouvoir présenter ce travail.

En premier lieu, je remercie ma directrice de mémoire, Antonietta Demuro, qui m'a suivie pendant toute la rédaction de ce travail avec professionnalisme mais aussi beaucoup de bienveillance, et a su me guider et me conseiller au cours de mes deux années de master.

Je souhaite remercier en second lieu Claire Caudrelier, l'enseignante qui a accepté de me laisser mener mon expérimentation dans sa classe. En plus de ses précieux conseils qui vont m'être utile dans ma pratique enseignante, elle a, entre autres choses, réorganisé son emploi du temps et son organisation de classe pour me laisser la liberté de réaliser mes séances avec les élèves.

Enfin, j'aimerais remercier mes proches, qui m'ont soutenue tout au long de l'écriture de ce mémoire. Ils m'ont toujours écoutée, encouragée et remotivée lorsque cela était nécessaire, et ont relu mes écrits, à de très multiples reprises, pour me permettre de parvenir à la version la plus aboutie possible.

A tous, merci.

Table des matières

Mémoire de recherche.

Introduction : Présentation générale du mémoire et genèse d'un questionnement.

Dans le cadre de la réalisation de ce mémoire de recherche pour ma seconde année de master MEEF, j'ai décidé d'effectuer un travail sur le thème de *la manipulation dans l'apprentissage des techniques opératoires* et plus particulièrement celle de la *soustraction posée*.

Au cours de ma scolarité, à l'école élémentaire et par la suite, je n'ai jamais, en tant qu'élève, éprouvé de quelconques difficultés en ce qui concernait les mathématiques. Bien au contraire, j'y ai toujours pris beaucoup de plaisir, et avec le recul, je peux même affirmer que j'ai toujours été en facilité dans ce domaine, en comparaison avec certains de mes camarades pour qui les différentes tâches proposées s'avéraient plus ardues. Or, il se trouve que lors de l'un des premiers cours de mathématiques disciplinaires dispensés à l'INSPE, une séance a été consacrée à la révision des techniques opératoires posées, notamment celles qui nous intéressent ici, les différentes techniques de soustraction posée. Outre le fait que j'ai découvert, au cours cette séance, une multitude de techniques opératoires dont j'ignorais l'existence, j'ai réalisé que ma compréhension de l'unique technique dont j'avais connaissance, et celle j'utilisais à titre personnel depuis des années, la technique dite « *technique traditionnelle* » ou « *technique par compensation* », n'était que très superficielle. Il m'est apparu que bien que je sache utiliser l'algorithme sans erreurs, je n'en avais jusque-là jamais saisi le sens réel. Mes lacunes se sont trouvées reliées à l'utilisation de la retenue dans celui-ci. Ma conception des différentes étapes de l'algorithme en ce qui concerne la retenue était jusqu'alors la suivante : lorsque les unités d'un certain ordre du diminuende sont inférieures aux unités du même ordre du diminuteur, il est nécessaire d'introduire une retenue afin que sa valeur devienne supérieure. Dans l'opération 193 – 87, il est impossible de soustraire 7 unités à 3 unités. On ajoute donc 10 unités au premier terme, considérant donc ainsi 13 unités. Afin de ne pas changer la différence, nous ajoutons également 10 unités au deuxième terme, cette fois sous forme d'une dizaine (*figure 1*).

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 9 & {}_{1}3 \\ - & & {}_{1}8 & 7 \\ \hline = & 1 & 0 & 6 \end{array}$$

Figure 1 - Soustraction posée avec la technique traditionnelle.

L'algorithme produit présente deux retenues, et un problème qui s'est toujours posé à moi a été de retenir « *laquelle de ces deux retenues valait 1 et laquelle valait 10* ». Je n'avais jamais compris la raison pour laquelle la première retenue placée s'antéposait aux 3 unités du premier terme pour former un nombre composé d'une dizaine et de 3 unités, alors que la seconde retenue placée au rang des dizaines était additionnée à 8 dans le deuxième terme (sur la figure 1, 8 + 1 = 9). Une réflexion logique me permettait tout de même de parvenir à mes fins, puisque si l'on reprend notre exemple de la figure 1, ajouter 1 à 3 ne permet pas de solutionner le problème initial, puisque 4 restant inférieur à 7, la poursuite de l'algorithme est impossible. Cette procédure de résolution ne m'avait jamais semblé inadaptée étant donné qu'elle me permettait systématiquement d'obtenir le résultat correct, et n'en ayant jamais eu l'utilité, je ne m'étais alors jamais intéressée aux notions sous-jacentes à cet algorithme.

La réponse en lien avec les principes positionnel et décimal de notre système de numération me parait désormais évidente, mais cette expérience m'a permis d'avoir, en tant que future enseignante, une réflexion plus professionnelle à ce sujet : si moi, relativement bonne élève, me trouvais en difficulté de compréhension face à cette retenue que je ne pouvais qu'appliquer machinalement tant le sens m'était inconnu, je n'ose imaginer le nombre d'élèves dans une situation similaire à la mienne. Il semble tout à fait légitime d'imaginer que, du fait de cette incompréhension, certains des élèves les plus en difficulté se retrouvent totalement bloqués dans la réalisation de l'algorithme.

C'est malheureusement ce que semble confirmer mes observations sur le terrain. J'ai réalisé en novembre 2019 un premier stage dans une classe de CM1 d'une école primaire de centre-ville, et même si pour la majeure partie des élèves, poser une soustraction avec retenue était une compétence maitrisée, pour certains, cette tâche s'avérait encore très difficile. A cela s'ajoute une seconde expérience de stage : j'ai de nouveau réalisé un stage dans une classe de CM1, entre octobre 2020 et février 2021, mais cette fois, dans une école de REP+ (Réseau d'Education Prioritaire). Mes doutes se sont hélas renforcés : lors d'une évaluation diagnostique réalisée en début d'année scolaire par l'enseignante de la classe, seuls 2 élèves sur les 24 avaient su effectuer une soustraction posée avec retenue.

Cette situation n'est pas anecdotique et semble être confirmée par les résultats de l'enquête *CEDRE* (Cycle des Evaluations Disciplinaires Réalisées sur Echantillon) publiés en septembre 2020. Cette dernière, menée par la *Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance* (DEPP) vise à établir des bilans nationaux des acquis des élèves en fin d'école élémentaire et en fin de collège. Cette enquête, renouvelée tous les 5 à 6 ans, permet de suivre l'évolution du niveau des élèves au fil des années et le constat est sans appel : « les performances en mathématiques des élèves de CM2 sont en baisse en 2019 » (DEPP, 2020). Cela concerne aussi bien les élèves considérés comme « à l'heure » que les élèves « en retard », même si cette baisse du niveau des élèves en mathématiques concerne surtout les milieux sociaux les moins favorisés. Si l'on s'intéresse plus particulièrement à l'échelle de performance de l'enquête, on constate que pour 17% des élèves de CM2 interrogés en 2019, les connaissances des nombres entiers permettent la réalisation d'additions et de soustractions mais que « l'utilisation des retenues dans la soustraction n'est pas acquise » (DEPP, 2020), et à cela s'ajoutent 8,8% d'élèves qui ont un niveau inférieur.

Si l'on se réfère aux *programmes officiels de juillet 2020* (MEN, 2020), la soustraction posée est introduite à partir du cycle 2. D'après *les repères annuels de progression* fournis par le site *éduscol* (Eduscol, 2016), cet apprentissage s'effectue notamment au CE1, le CP étant consacré à la technique opératoire de l'addition. Au plus tard en période 3 de CE1, après que la maitrise de la technique opératoire de l'addition ait été consolidée et étendue à des nombres plus grands (champ numérique inférieur à 1000 (Eduscol, 2020)), les élèves apprennent à utiliser la technique opératoire de la soustraction posée, dans un premier temps sans retenue. Cette connaissance s'étendra aux soustractions avec retenue au cours de l'année. Durant le cycle 2, seuls les nombres entiers sont abordés, l'introduction aux nombres décimaux s'effectue au cycle 3, et dans la continuité de cette dernière a lieu une extension des techniques opératoires de l'addition et de la soustraction aux nombres décimaux. Les données de l'enquête CEDRE, c'est-à-dire les 25% d'élèves de CM2 qui ne savent pas réaliser de soustraction posée de deux nombres entiers avec retenue, semblent d'autant plus alarmantes au regard des programmes, qui prescrivent cet apprentissage en classe de CE1. Il parait alors essentiel de s'interroger sur ce sujet, et c'est donc autour de ce thème de la *retenue dans la soustraction posée de deux nombres entiers* que va s'orienter mon questionnement.

L'enquête CEDRE ne précise pas la technique opératoire de la soustraction qui est utilisée par les élèves, et pour cause : il n'est pas prescrit dans les instructions officielles de technique à enseigner. Le choix revient donc aux enseignants du cycle 2 et 3 de s'entendre sur la méthode qu'ils souhaitent enseigner aux élèves, la seule consigne du ministère de l'éducation étant que la méthode soit identique sur les deux cycles (Eduscol, 2016). Il me semble alors intéressant à ce stade de mon raisonnement de m'intéresser aux différentes techniques qui s'offrent au choix des enseignants ainsi qu'aux difficultés qu'elles peuvent présenter pour les élèves et qui pourraient expliquer ces résultats. Cela sera l'objet de la première partie théorique de mon travail, qui s'appuiera sur mes lectures effectuées en lien avec ce thème et me permettra ainsi de formuler mes hypothèses de travail. La seconde partie de ce mémoire sera une partie expérimentale, qui décrira dans un premier temps, la séquence de remédiation qui a été mise en place pour les élèves de la classe où j'ai effectué mon stage, puis dans un second temps, une analyse des résultats qu'elle a permis de mettre en avant, apportant ainsi des éléments de réponses quant à mes hypothèses.

Partie théorique

1. Les différentes techniques opératoires de la soustraction.

Il existe de nombreuses techniques opératoires de la soustraction, mais à l'école élémentaire, la soustraction se décline principalement sous la forme de trois algorithmes différents : la technique de l'*addition à trou,* la technique *par cassage,* ainsi que la technique *traditionnelle*. L'utilisation de la retenue dans ces algorithmes repose sur les aspects positionnel et décimal de notre système de numération écrit et chiffré, et il me semble donc fondamental d'expliciter ces différents concepts avant de détailler le fonctionnement des différents algorithmes, leurs avantages et leurs inconvénients.

1.1. Les aspects positionnel et décimal de la numération.

Dans notre système de numération écrit chiffré, les chiffres qui composent un nombre ont un sens, tout d'abord, en fonction de leur *position* dans celui-ci : la valeur associée à un chiffre dépend de son rang dans le nombre. Un nombre composé de quatre chiffres se compose, de droite à gauche, d'un chiffre des unités, d'un chiffre des dizaines, d'un chiffre des centaines et d'un chiffre des milliers. Le même chiffre n'aura pas la même valeur associée, qu'il se trouve en première position dans le nombre ou en quatrième : un « 4 » au rang des milliers aura une valeur de 4000 alors qu'un « 4 » au rang des unités aura une valeur de 4. Ainsi, le nombre 4404 peut être décomposé en 4 milliers, 4 centaines et 4 unités, la présence du zéro indiquant une absence d'unité au rang des dizaines. Ce type de système positionnel s'oppose à des systèmes de type additif où les chiffres (ou autres symboles) ont chacun leur valeur propre, indépendamment de leur position dans le nombre : les chiffres placés les uns à côtés des autres additionnent leur valeur pour former le nombre.

Le second aspect qui donne au chiffre sa valeur dans notre système de numération est le principe *décimal*. Il s'agit ici de la relation qui lie une unité de numération aux autres. Dans un système décimal, une unité d'un rang donné, est égale à dix unités du rang directement inférieur, et inversement. On parle parfois de groupements par 10 et d'échanges entre les différentes unités de rangs. Cela peut paraitre évident, et le meilleur moyen de se rendre compte de l'importance de cet aspect dans la numération me semble être de prendre un contre-exemple : dans un système de numération en base 5, une unité d'un rang donné vaut 5 unités de rang inférieur. Si l'on dénombre dans ce système, cela nous fait 0, 1, 2, 3, 4, 10, 11… Le nombre 10 ayant une valeur de 5 dans notre système de numération, le nombre 11 une valeur de 6.

Ces deux aspects entrent en jeu dans la recomposition d'un nombre à partir de sa décomposition en unité de numération : nous sommes ainsi capables de dire que 75 unités + 54 unités est égal à 129 unités, soit 1 centaine, 2 dizaines et 9 unités, mais également 12 dizaines et 9 unités ou 1 centaine et 29 unités.

1.2. L'addition à trou.

Cette technique pour résoudre une soustraction consiste en la recherche d'un complément à un premier nombre, permettant d'obtenir le résultat recherché. Elle repose sur la propriété mathématique suivante : $a - b = c \leftrightarrow b + c = a$, qui permet donc de résoudre une soustraction en utilisant la technique opératoire de l'addition, déjà connue ou en cours d'acquisition par les élèves. Cette méthode n'a généralement pas pour ambition de persister dans le temps, elle constituera plutôt un intermédiaire avant l'introduction de l'une des deux autres techniques. Elle pourra également être utilisée pour vérifier le résultat d'une soustraction posée. Il est néanmoins important de préciser son existence, car elle peut faire partie des procédures des élèves.

		6	8
+	1	3	1
=	1	9	9

Figure 2 - Addition à trou sans retenue

	1	1	
		1	4
+	0	9	9
=	1	1	3

Figure 3 - Addition à trou avec retenue

Ainsi, l'opération 199 – 68 est transformée en 68 + ? = 199 (*figure 2*), il s'agit alors de non plus répondre à la question « *combien font 199 – 68 ?* » mais « *combien faut-il ajouter à 68 pour obtenir 199 ?* ». L'élève va alors réaliser les opérations qui lui permettent de répondre aux questions « *combien faut-il ajouter à 8 pour obtenir 9 ? combien faut-il ajouter à 6 pour obtenir 9 ? combien faut-il ajouter à 0 pour obtenir 1 ?* » et ainsi mettre en évidence que le résultat recherché est *131*. Ce calcul ne nécessite pas d'avoir recours à une retenue, et la simple utilisation des tables d'addition suffit et peut sembler accessible pour des élèves qui n'auraient pas encore appris l'un des algorithmes de soustraction posée pour résoudre cette opération, ou des élèves en difficulté sur l'application de ce dernier. Cette technique leur permet ainsi de résoudre des problèmes soustractifs sans avoir recours à l'une ou l'autre des techniques de la soustraction posée évoquées plus haut. En revanche, en plus du fait qu'il peut parfois s'avérer être compliqué pour les élèves de transposer la situation soustractive vers une situation additive et inversement (Académie de Grenoble, 2011), nous pouvons constater sur la *figure 3*, que cet algorithme se complique légèrement dans sa compréhension et son application lorsqu'il s'agit d'y faire intervenir une retenue : l'opération 113 – 14 est transposée en 14 + ? = 113. L'élève doit alors se poser cette première question « *combien faut-il ajouter à 4 pour obtenir 3 ?* ». Cette opération est « impossible » pour des élèves d'école élémentaire et il est alors nécessaire d'avoir recours à des retenues.

1.3. La technique par cassage.

La technique par *cassage*, autrement appelée technique *par emprunt* ou technique *anglo-saxonne* recours comme son nom l'indique, au cassage puis à l'emprunt d'une unité de rang supérieur. Son utilisation, plutôt anecdotique il y a encore quelques années, est de plus en plus courante, car plus facile à comprendre par des élèves de CE1.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 8\,\cancel{9} & 1\,8 \\ - & & 6 & 9 \\ \hline = & 1 & 2 & 9 \end{array}$$

Figure 4 - Soustraction avec retenue réalisée avec la technique par cassage.

Lorsque la soustraction ne nécessite pas le recours à une retenue, il n'y a aucune distinction entre la technique par cassage et la technique traditionnelle : on réduit la valeur des unités d'un certain ordre du diminuende de la valeur des unités de même ordre du diminuteur, ce qui nous donne le résultat pour le rang considéré. La même opération est ensuite réalisée pour les rangs suivants. La différence entre les deux techniques intervient avec l'usage de la retenue. L'opération 198 – 69 (*figure 4*) nécessite le recours à une retenue pour la résolution : 8 – 9 est « impossible » à réaliser pour des élèves d'école élémentaire, les nombres relatifs ne faisant pas partie des programmes des cycles 2 et 3. Nous allons donc « emprunter » une dizaine aux neuf dizaines du diminuende, que nous allons « casser » en dix unités, et faire passer au rang des unités pour les ajouter à nos huit unités déjà présentes. Cette manipulation se base sur le principe décimal de notre système de numération : il s'agit d'utiliser la correspondance entre une dizaine et dix unités. Si l'on reprend l'opération en entier cela nous fait : 1 centaine, 8 dizaines et 18 unités auxquelles on soustrait 6 dizaines et 9 unités, ce qui nous permet d'effectuer le calcul 18 – 9 = 9, puis 8 – 6 = 2, et enfin 1 – 0 = 1. Le résultat de l'opération 198 – 69 est donc 129.
Cette technique opératoire présente deux avantages principaux par rapport aux autres méthodes : cette manœuvre, par des échanges entre les unités de rangs proches, met uniquement en jeu des principes en lien avec les aspects positionnel et décimal de la numération qui sont des compétences déjà travaillées et acquises par les élèves (Académie de Grenoble, 2011). De plus, même si toutes les techniques opératoires peuvent, dans une moindre mesure, faire appel à la manipulation, celle-ci est très aisément transposable par du matériel, ce qui peut fortement contribuer à

la compréhension et l'apprentissage de l'algorithme par les élèves. En revanche, cette technique comporte également un certain nombre d'inconvénients, le principal étant lié à la présentation qu'implique le fait de raturer les unités du rang auquel on les « emprunte », nécessitant d'avoir anticipé l'espace utile à la résolution. Dans le cas contraire, l'opération sera possiblement désordonnée et difficilement déchiffrable, augmentant par la même occasion le risque d'erreurs pour les élèves. Cela pose d'autant plus problème lorsque la résolution implique de multiples emprunts, comme l'illustre la *figure 5*.

	1 ~~2~~	9 ~~10~~	1 8
-		6	9
=	1	3	9

Figure 5 - Soustraction complexe réalisée avec la technique pas cassage

Cette figure met également en avant une autre difficulté qui se pose lorsque le diminuende est composé d'un zéro. L'opération 208 – 69 nécessite comme précédemment d'emprunter une dizaine pour effectuer l'opération 8 – 9. Or ici, le chiffre des dizaines est 0, impossible donc d'emprunter au rang directement supérieur. Il faut donc emprunter une des deux centaines, pour la casser et ainsi obtenir 10 dizaines, puis emprunter une de ces dizaines, pour la casser et ainsi obtenir les dix unités souhaitées. Nous pourrons ensuite réaliser l'opération 10 + 8 = 18 unités. A la suite de ces échanges nous obtenons donc l'opération 1 centaine, 9 dizaines et 18 unités auxquelles se soustraient 6 dizaines et 9 unités. Nous pouvons alors poursuivre avec l'opération 18 – 9 = 9, puis 9 – 6 = 3, et enfin 1 – 0 = 1 pour obtenir le résultat 139. Ces multiples manœuvres sont d'autant plus de risques d'erreurs pour les élèves, d'autant plus si ces derniers n'ont pas compris le sens réel de la démarche.

1.4. La technique traditionnelle.

La dernière technique que nous allons détailler est la technique traditionnelle ou technique par *conservation des écarts*, qui est celle majoritairement enseignée dans les écoles françaises. L'utilisation de la retenue dans cette dernière se base sur la propriété de l'écart constant, qui en mathématiques peut se traduire de la manière suivante : $a - b = (a + c) - (b + c)$.

	1	9	$_{1}$8
-		$_{1}$6	9
=	1	2	9

Figure 6 - Soustraction avec retenue réalisée avec la technique traditionnelle.

La première étape pour résoudre l'opération 198 – 69 présentée sur la *figure 6* consiste à résoudre 8 – 9, ce qui est « impossible », et l'on ajoute alors une dizaine aux unités du diminuende. Cette dizaine est matérialisée par une retenue. D'après le principe décimal de notre système de numération, une dizaine équivaut à dix unités, nous obtenons donc 8 + 10 = 18 unités, auxquelles nous pouvons désormais retrancher 9 unités. L'ajout d'une première retenue au diminuende, au regard du principe de conservation des écarts, implique l'ajout d'une seconde : puisque l'on a ajouté une dizaine au diminuende, il nous faut également en ajouter une au diminuteur, de sorte que l'écart entre les deux nombres, c'est-à-dire le résultat que l'on recherche, reste inchangé. Cette dizaine est ajoutée à la dizaine du diminuteur et est également matérialisée par une retenue. Cette dernière, ainsi placée dans la colonne des dizaines a, d'après le principe positionnel de la numération, une valeur de 1. On obtient donc 6 + 1 = 7 dizaines. Après ajout de la retenue, l'opération de départ est devenue 1 centaine, 9 dizaines et 18 unités auxquelles on retranche 7 dizaines et 9 unités. Cela fait donc 18 – 9 = 9, puis 9 – 7 = 2 et enfin 1 – 0 = 1. La *différence* est donc égale à 129. Contrairement à la technique de l'addition à trou, cette technique a l'avantage de se construire sous une forme plus classique, parfois plus facile à poser pour certains élèves. En revanche, comme nous l'avons vu précédemment, du fait qu'elle convoque la propriété de l'écart constant, cette technique nécessite l'utilisation d'une retenue au diminuende et une au diminuteur, rendant de ce fait la résolution plus complexe. A cela s'ajoute le fait que ces retenues ne proviennent pas d'un emprunt interne au nombre comme cela est le cas avec la technique par cassage : ce dernier point peut rendre la compréhension d'autant plus difficile. Du fait de l'intervention de ce principe d'invariance de l'écart, le sens de l'algorithme peut échapper aux élèves, qui n'auront alors pas d'autres choix que d'appliquer la technique sans la comprendre. Cependant, elle reste la technique qui présente le plus d'avantages à être utilisée dans le cas où celle-ci s'intègre dans le cadre de la résolution d'une division posée : en effet, du fait de la présentation de cette dernière, on imagine difficilement utiliser la technique par cassage dans ce contexte. Par ailleurs, la technique traditionnelle est connue des parents, qui pourront également accompagner les élèves dans leurs apprentissages.

Chacune des techniques présentées ci-dessus semble offrir des avantages et des inconvénients, qu'ils soient en lien avec la présentation de l'opération ou le sens de celle-ci. *Quel choix est alors le plus judicieux à faire en tant qu'enseignant* ?

2. Quel choix pour les enseignants ?

Dans un article datant de 2018 sur le site d'information sur l'éducation « *café pédagogique* », Rémi Brissiaud indique que d'après lui, n'imposer qu'une seule technique sur l'ensemble des deux cycles ne favorise pas la réussite des élèves. En effet, il affirme que faire le choix de la technique par cassage, plus facile à comprendre pour des élèves de CE1, pose effectivement des problèmes lors de soustractions complexes (notamment lorsque les nombres sont composés de zéros) mais également lorsqu'il s'agit de réaliser cette soustraction dans le cadre d'une division posée en fin de cycle 3. En revanche, faire le choix de la technique traditionnelle dès le CE1 suppose que les élèves soient en mesure de comprendre et d'accepter qu'en appliquant la propriété de l'écart constant, le résultat reste inchangé or « il s'agit d'une propriété conceptuelle de haut niveau, totalement inaccessible à un grand nombre d'élèves de CE1 » (Brissiaud, 2018). Enseigner la technique traditionnelle à des élèves de CE1 revient à leur demander d'appliquer de manière mécanique et automatisée un algorithme dont ils ne sont pas en mesure d'en comprendre le sens. Comprendre la notion d'écart constant dans l'algorithme suppose également de comprendre la signification de la retenue, et le fait que le chiffre « 1 » inscrit pour représenter celle-ci correspond à dix unités ajoutées au diminuende et à une dizaine ajoutée au diminuteur, les deux valeurs étant égales. Or, d'après Nicolas Pinel, conseiller pédagogique et responsable du site méthode heuristique, ce double sens n'est que peu compris par les élèves, y compris ceux de cycle 3, qui sont généralement « incapables de l'expliquer » (Pinel, s.d.).

Les auteurs semblent s'accorder pour dire que le principe d'écart constant est une notion qui pose des difficultés aux élèves, du CE1 au CM2, incitant les enseignants à se détourner de la méthode traditionnelle au profit de la méthode par emprunt. En revanche, leurs propos semblent également sous-entendre que l'objectif à terme pour les élèves, serait tout de même qu'ils dépassent ces difficultés pour utiliser la technique opératoire par compensation qui, lorsqu'elle est maitrisée, est plus directe et plus efficace que la technique par cassage.
C'est ce choix qui a été réalisé dans l'école où j'ai effectué mon stage, et c'est autour de cette technique que je vais orienter la suite de mes lectures et de mon travail de recherche : *quelles sont les difficultés que rencontrent les élèves dans la réalisation de l'algorithme de la soustraction posée par la méthode traditionnelle ?*

3. Les erreurs des élèves.

Lorsqu'ils se retrouvent confrontés à la résolution d'une soustraction posée avec la technique traditionnelle avec ou sans retenue, les élèves peuvent commettre un certain nombre d'erreurs. Ces erreurs peuvent être de natures variées et poussent parfois les enseignants à faire le choix de la technique par cassage. Je fais le choix de les répartir en quatre catégories présentées ci-dessous :

- Erreur dans la présentation du calcul : les unités d'un même rang ne sont pas placées les unes sous les autres, ce qui peut amener les élèves à effectuer des opérations entre des unités qui ne sont pas du même ordre. Ces erreurs sont directement liées au principe positionnel de la numération et à la valeur de chaque chiffre en fonction de sa position dans le nombre.
- Erreur de calcul : lié à de l'inattention ou à la méconnaissance des résultats de base, le résultat de l'opération effectuée n'est pas correct, par exemple 7 – 3 = 5.
- Erreur dans la réalisation de l'algorithme : l'élève n'a pas compris le sens de l'opération et effectue une addition au lieu d'une soustraction, il confond les signes «+» et «–» ou commence sa soustraction par le rang de gauche au lieu de commencer par les unités.
- Erreurs liées à la *retenue* :
    - Lorsqu'une unité d'un certain ordre du diminuende est inférieure à la même unité de rang du diminuteur, l'élève intervertit ces chiffres pour appliquer la règle d'après laquelle il faut toujours retirer le plus petit au plus grand, cela au lieu de placer une retenue, par exemple : 3 – 7 est impossible, l'élève effectue donc l'opération 7 – 3 = 4. Cette démarche est incorrecte puisque la soustraction ne possède pas la propriété de commutativité.
    - L'élève place une retenue lorsque ce n'est pas nécessaire.
    - L'élève ne recourt pas à l'utilisation de la retenue lorsqu'elle est nécessaire : il n'effectue pas l'opération demandée car celle-ci est « impossible » ou considère que le résultat est zéro.
    - L'élève ne positionne pas sa retenue au bon endroit dans l'opération.
    - L'élève ne répercute pas la seconde retenue au diminuteur : cette erreur est liée à la propriété de l'écart constant qui entre en jeu dans l'utilisation de la retenue dans la technique de la soustraction traditionnelle.
    - L'élève indique la retenue, mais oublie de la comptabiliser.
    - L'élève n'associe pas la bonne valeur à la retenue (voir première partie, « la retenue qui vaut 10 et la retenue qui vaut 1 »). Cette erreur est en lien avec le principe décimal de la numération ainsi qu'à la notion d'écart constant : ajouter une dizaine à chaque terme permet de conserver l'écart entre les deux nombres. Cette dizaine est ajoutée aux unités, ce qui revient, par le principe décimal, à lui ajouter 10 unités.

Les sources d'erreurs lors de la réalisation d'une soustraction posée sont variées, et il ne s'agit pas uniquement de déterminer quels sont les élèves qui ne maitrisent pas cette compétence, mais de comprendre pourquoi. Il sera également nécessaire de déterminer si ces erreurs sont significatives ou anecdotiques, dues à une inattention par exemple. Une erreur significative est une erreur qui est *reproductible* chez les élèves, c'est-à-dire que l'élève réalise cette erreur face à chaque situation de même type. Il faudra alors veiller à proposer aux élèves plusieurs situations similaires de manière à déterminer si l'erreur est due ou non à un problème de compréhension. On constate que certaines difficultés que peuvent rencontrer les élèves sont plus globales, et ne concernent pas uniquement la technique traditionnelle de la soustraction posée, j'entends notamment les erreurs liées à la présentation de l'opération, les erreurs de calcul ou erreurs dans le sens de la réalisation : elles peuvent se retrouver dans toutes les techniques opératoires et ne sont pas spécifiques à la technique traditionnelle. En revanche, la complexité de la technique traditionnelle semble reposer sur l'utilisation de la retenue, la majorité des erreurs étant en lien avec cette dernière. Maitriser l'emploi de la retenue pourrait alors considérablement réduire le nombre d'erreurs dans l'application de l'algorithme, et nous pouvons alors nous demander *comment faire en sorte que les élèves maitrisent l'utilisation de la retenue dans la technique traditionnelle de la soustraction posée ?*

4. Travailler sur la justification de l'algorithme pour le comprendre.

Dans leur article publié en 2016 dans la revue Grand N intitulé « La programmation des techniques opératoires dans les manuels scolaires de l'école élémentaire. Le cas de l'addition et de la soustraction », Éric Mounier, maitre de conférences en didactique des mathématiques, et Maryvonne Priolet, maitre de conférences en sciences de l'éducation, évoquent la question de la justification de la correction de l'opération, c'est-à-dire les raisons pour lesquelles l'algorithme conduit toujours à obtenir le résultat correct, basé sur les propriétés du système de numération écrit chiffré. Dans cet article, il est indiqué qu'il existe deux grands enjeux dans les apprentissages des techniques opératoires qui sont d'une part la mémorisation de l'algorithme et son utilisation, et d'une autre part la compréhension de celui-ci, c'est-à-dire sa *justification*. Ils émettent l'hypothèse que la compréhension des principes qui justifient la technique permettrait une meilleure mémorisation de l'algorithme ainsi que la capacité à y détecter des erreurs (Mounier et Priolet, 2016).

Cette justification, c'est ce qu'Yves Chevallard, didacticien des mathématiques, nomme dans sa *théorie anthropologique du didactique* (TAD), la *technologie*. Dans cette théorie, il fait le postulat que toute activité humaine, dont fait partie l'activité mathématique, répond à un modèle unique qu'il décompose en quatre parties dont la première est le *type de tâche*, qui correspond à ce qu'il faut faire, par exemple « calculer la soustraction de deux nombres entiers ». Pour réaliser cette tâche il va falloir utiliser une deuxième partie, qui est la *technique*. La technique correspond à une manière d'accomplir la tâche, et peut se présenter sous forme d'algorithme, comme dans le cas de la soustraction posée : le terme de *technique opératoire* utilisé plus haut prend alors tout son sens. La troisième partie est celle de la *technologie* évoquée précédemment. C'est cette partie qui permet de justifier de manière rationnelle la technique, et ainsi confirmer que cette dernière permet d'accomplir la tâche. Elle permet également d'expliquer la technique, de l'expliciter, par exemple « je rajoute une dizaine à mon nombre du bas parce que je rajoute une dizaine à mon nombre du haut, ce qui me permet de garder le même écart entre mes deux nombres ». La quatrième et dernière partie de ce modèle est la *théorie* qui permet, elle, de justifier les implicites de la technologie. Si nous poursuivons dans notre exemple, les propriétés d'écarts constants, ainsi que le principe positionnel et le principe décimal de la numération constituent la théorie de la technique opératoire, et permet de justifier la retenue lors d'une soustraction posée (Chevallard, 1998).

Au regard de ces deux articles, il semble que pour améliorer l'apprentissage de la technique opératoire de la soustraction avec retenue, il faille agir sur la compréhension des notions et des concepts mis en jeu dans la réalisation de cette dernière, soit, sur la notion d'écart constant ainsi que sur les propriétés relatives au système de numération écrit chiffré, c'est-à-dire l'aspect décimal et positionnel sous-jacents à cette dernière. C'est donc autour de cela que je décide d'axer mon travail, par la mise en place d'activités de remédiation autour de la soustraction posée avec retenue pour les élèves qui éprouvent des difficultés avec cette tâche. La question que je me pose désormais est alors de savoir c*omment amener les élèves à comprendre le sens de la retenue en lien avec les différents aspects de notre système de numération et le concept d'écart constant ?*

5. **L'utilisation de matériel de manipulation comme support d'apprentissage.**

Dans leur article intitulé « *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs* », Marianna Bosch, professeure à l'université Ramon Llull de Barcelone, et Yves Chevallard déterminent une distinction entre les objets *non-ostensifs* et *ostensifs*. Les objets non-ostensifs, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent, sans pouvoir être perçus par les sens, contrairement aux objets ostensifs ayant « une nature sensible », c'est-à-dire pouvant être perçus par les sens comme les graphismes peuvent être perçus par la vue, les sons par l'ouïe ou les objets matériels par le toucher. La particularité de ces derniers, et ce qui les distingue des objets non-ostensifs, est d'être concrètement manipulables par les individus. La *manipulation* est définie dans cet article comme « les divers usages possibles, par le sujet humain, des objets ostensifs »

(Bosch, Chevallard, 1999, p.11), et les objets non-ostensifs permettent une manipulation adéquate des objets ostensifs. Si l'on rapporte ces informations au regard de la soustraction posée, l'algorithme opératoire utilise des objets ostensifs de nature graphique c'est-à-dire les écritures chiffrées des nombres. La manipulation appropriée de ces objets pour réaliser la tâche désirée est régie par des objets non-ostensifs que sont les technologies et théories associées. La manipulation peut donc être définie comme l'utilisation d'objets ostensifs pouvant être de différentes natures, notamment en ce qui nous intéresse ici, des objets « matériels ».

Le docteur en didactique des mathématiques, Catherine Berdonneau, dans sa conférence de 2006 « *De l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques* » définit la manipulation en lui attribuant des caractéristiques bien précises : les objets manipulés par l'enfant se doivent d'être de petite taille par rapport à ce dernier, mais de plus, ceux-ci doivent être guidés par des gestes finalisés, c'est-à-dire dans un but fixé. C'est cette définition que nous retiendrons pour ce travail lorsqu'il sera question de manipulation. Un autre point essentiel mis en avant dans ce document est l'opposition que réalise l'auteure entre deux supports de manipulation que sont le matériel et les jeux. Le matériel se caractérise par une utilisation individuelle et un enjeu de type « réussir », contrairement au jeu qui suppose une utilisation en groupe et un enjeu de type « gagner ». La manipulation, par son utilisation personnelle, aurait comme avantage par rapport au jeu de mettre l'élève en confiance face à la tâche, permettant de multiples essais-erreurs et ainsi un apprentissage progressif et autonome. La manipulation est présentée ici comme essentielle dans les apprentissages, car elle répond au besoin de sensorialité des élèves, mais elle permet aussi de centrer leur attention sur la tâche et sur les connaissances qu'elle permet de construire. Autre information essentielle que nous pouvons retirer de ce document est que l'auteure précise que la manipulation de matériel s'adapte à tout type de profils d'élèves, en réussite ou en difficulté : l'utilisation de matériel ne représentant pas de difficultés particulières, les gestes demandés étant simples et habituels (par exemple modifier la position ou l'orientation). De plus, la manipulation peut également être particulièrement bénéfique dans le cas d'élèves allophones ou peu à l'aise avec le langage, de même que pour les élèves en difficulté avec l'écriture ou la lecture, « les situations pouvant prendre sens malgré l'obstacle du langage » (Berdonneau, 2006, p.2). Ces élèves, par l'intermédiaire du matériel, ne se retrouvent pas bloqués dans leur progression.

À la vue de ces diverses informations, il semblerait que la manipulation de matériel pourrait aider les élèves dans la construction de leurs connaissances, d'autant plus s'ils sont en difficulté.

6. <u>Problématique et hypothèses.</u>

A la vue de mes lectures et de mes recherches, il semblerait que la manipulation soit un moyen efficace d'amener les élèves à maitriser l'algorithme de la technique traditionnelle de la soustraction, ce qui me permet de formuler la problématique suivante :

L'utilisation du matériel peut-elle être un outil de remédiation dans l'apprentissage de la technique traditionnelle de la soustraction avec retenue ?

Cette problématique globale donne lieu à de multiples sous-questions auxquelles l'expérimentation mise en place devrait permettre de fournir des pistes de réponses.
Il semble que pour parvenir à la maitrise de la technique opératoire de la soustraction posée par la technique traditionnelle, il faille agir sur la compréhension du principe d'écart constant, si difficile à concevoir pour les élèves. Ce point nous amène à nous demander si *la manipulation peut permettre aux élèves de comprendre la notion d'écart constant ?* Il est ainsi possible de formuler l'hypothèse n°1 pour cette expérimentation : *la manipulation va permettre aux élèves de comprendre la notion d'écart constant*.
La manipulation semble également pouvoir permettre aux élèves de comprendre comment ce concept d'invariance des écarts est mis en œuvre dans l'algorithme de la soustraction posée, par l'ajout d'une retenue à chaque terme de l'opération. Une deuxième sous-question est alors de se demander *si la manipulation peut permettre de donner du sens à la retenue dans l'algorithme de la soustraction traditionnelle ?* Ce point constitue l'hypothèse n°2 : *la manipulation va permettre aux élèves de comprendre comment l'écart constant, par l'utilisation de la retenue, s'applique à l'algorithme de la soustraction traditionnelle*.
Enfin, comprendre le principe d'écart constant et la manière dont il se met en œuvre dans la technique opératoire de la soustraction devrait permettre aux élèves d'appliquer l'algorithme sans erreurs, et il est alors légitime de se demander si *comprendre le sens et la valeur de la retenue permet d'aider à l'utilisation et la mémorisation de l'algorithme de la soustraction posée ?* Ce dernier point permet de formuler l'hypothèse n°3 de ce travail : *si les élèves comprennent le sens et la valeur de la retenue, alors cela va les aider à utiliser et mémoriser l'algorithme de la soustraction traditionnelle*.

Pour cette expérimentation, j'ai fait le choix de me focaliser sur les nombres entiers, et non sur les décimaux comme on pourrait l'attendre d'élèves de cycle 3. Je justifierai cette décision par le fait qu'il est fort probable qu'étendre l'algorithme de la soustraction posée à des nombres décimaux alors même que celui avec des nombres entiers n'est pas maitrisé mettrait les élèves en grande difficulté. Il me semble qu'effectuer un travail de remédiation avant que les nombres décimaux soient abordés permettra, si mes hypothèses se confirment, d'amener les élèves à comprendre et à appliquer correctement l'algorithme de la soustraction par la méthode traditionnelle avec des nombres entiers, ce qui leur permettra par la suite, lorsqu'il sera question d'étendre la technique aux nombres décimaux, d'aborder la situation dans de bonnes conditions.

Partie expérimentale

1. Méthodologie de recueil de données : présentation de la séquence expérimentale.

La classe dans laquelle j'ai eu la possibilité de mettre en place mon expérimentation est une classe de 24 élèves de CM1 d'une école REP+. Mon recueil de données a pris la forme d'une séquence expérimentale constituée de trois séances de remédiation pour les élèves en difficulté. Voici un tableau synthétique des connaissances et compétences visées pour chacune d'entre elle :

Séances	Connaissance ou compétence spécifique
Séance 1	*Le résultat d'une soustraction est l'écart entre les deux termes de l'opération*. Comprendre la notion d'écart constant implique au préalable de concevoir que l'un des sens de la soustraction est de chercher l'écart entre deux nombres. Dans cette séance, le matériel de manipulation va permettre aux élèves de visualiser cet aspect : les élèves construisent des **empilements de cubes unités** issus d'un kit de matériel de numération en base dix. Ces empilements permettront de représenter le résultat de la soustraction qui leur est proposée. Associés à la **bande numérique graduée** fournie aux élèves, ils leur permettront de visualiser le résultat de la soustraction comme l'écart entre les deux termes de celle-ci : il s'agit de la première étape pour permettre aux élèves d'accéder, par la suite, à la notion d'invariance des écarts.
Séance 2	*Ajouter la même valeur à chaque terme d'une soustraction ne modifie pas l'écart entre les deux, le résultat reste donc le même : c'est l'écart constant.* Dans le prolongement de la première, cette deuxième séance permettra de poursuivre la construction de la notion d'écart constant. En effet, à la suite de la première séance, les élèves associent le résultat d'une soustraction à l'écart entre les deux termes de celle-ci. A l'aide du même matériel, les élèves vont désormais pouvoir matérialiser le fait qu'ajouter la même valeur à chaque terme d'une soustraction n'en modifie pas le résultat. Cette notion est celle de l'écart constant, et il s'agit de la notion sous-jacente à l'utilisation de la retenue dans la méthode traditionnelle de la soustraction. Les élèves vont pouvoir expérimenter cette notion de manière générale, avant de comprendre plus précisément comment ce concept entre en jeu dans la technique opératoire de la soustraction au cours de la troisième séance.

Séance 3	<u>*Savoir poser une soustraction avec retenue par la technique de conservation des écarts (ou technique traditionnelle).*</u> La séance 3 sera consacrée au travail sur l'algorithme de la technique traditionnelle, et plus précisément sur la retenue en lien avec l'écart constant : il ne s'agit plus d'ajouter des valeurs arbitraires à chaque terme de l'opération, comme au cours de la séance 2, mais de leur ajouter 10. Cet ajout s'effectue de manière normalisée, et cette séance va permettre de mettre en évidence la manière dont il se déroule. Les élèves disposent pour cela de **matériel de numération en base dix** (centaines, dizaines et unités) pour leur permettre de visualiser concrètement ce qui se déroule lors de la résolution d'une soustraction posée. Ils disposent de nouveau d'une **bande numérique graduée** qui leur permettra de vérifier leurs résultats à la manière des séances 1 et 2.

La construction de la séquence présentée ci-dessus prend appui sur les travaux d'Anne-Marie Rinaldi (Rinaldi, 2013), et ceux du professeur agrégé de mathématiques et maitre de conférences Frédéric Tempier, publiés sur son site, où il propose un grand nombre de ressources pour les enseignants en lien avec les différents aspects du système de numération écrit (Tempier, 2017). Pour la séance n°2, je me suis également appuyée sur les travaux de Carolyn Syryn dans son mémoire de recherche (Syryn, 2017). Les préparations des séances sont présentées en annexe. Ces séances ont été précédées d'une évaluation diagnostique qui m'a permis de déterminer que treize élèves éprouvaient des difficultés avec la soustraction posée avec retenue. Les conditions temporelles et matérielles ne m'ont pas permis de répartir les treize élèves en deux groupes, les séances se sont donc déroulées avec tous les élèves en même temps. Elles ont été suivies d'une séance d'évaluation finale dont les données serviront à conclure quant à mes hypothèses.

1.1. <u>Evaluation diagnostique.</u>

Avant de débuter les séances de remédiation, il m'a fallu déterminer quels sont les élèves pour lesquels poser une soustraction avec retenue par la méthode traditionnelle n'était pas une compétence acquise, et quelle est la nature du ou des problèmes qui les mettent en difficulté. Pour élaborer un test qui m'a permis de déterminer avec précision le niveau des élèves, il m'a fallu dans un premier temps anticiper quelles pourraient être leurs erreurs, de manière à leur proposer des situations permettant de faire apparaitre où se situent exactement leurs besoins : pour cela, je me suis basée sur la liste évoquée dans la section « les erreurs des élèves » de ma partie théorique. Pour cette évaluation, une liste de neuf soustractions a été proposée aux élèves

avec la consigne « *pose les opérations suivantes* ». L'application de l'algorithme reposant sur les aspects positionnel et décimal de la numération, j'ai également décidé d'évaluer la maitrise de ces derniers par les élèves. Enfin, j'ai élaboré deux tests différents, qui ont été répartis un élève sur deux, de manière à m'assurer que les résultats présentés sont bien issus d'une réflexion personnelle, j'entends par là que les élèves n'ont pas pu copier les résultats de leurs voisins, ce qui me garantit donc que les besoins évalués sont réellement les leurs. Ils ont pu disposer de la place nécessaire pour poser les opérations ainsi que tout le temps dont ils avaient besoin.
Les deux évaluations sont présentées ci-dessous, dans la *figure 7*. L'exercice 2 de l'évaluation n°1 est tiré de l'article de Frédérick Tempier, *une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2* (Tempier, 2010), et j'ai réalisé celui de l'évaluation 2 en m'inspirant de ce dernier.

Evaluation diagnostique n°1	
Exercice 1 :	Exercice 2 :
(1) 8657 – 3352 =	a. 8 dizaines + 5 unités = ______
(2) 5736 – 421 =	b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = ______
(3) 8918 – 2456 =	c. 6 centaines + 9 unités = ______
(4) 9743 – 5351 =	d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = ______
(5) 4357 – 1208 =	e. 3 dizaines + 6 centaines = ______
(6) 5409 – 1268 =	f. 2 dizaines + 15 unités = ______
(7) 4359 – 648 =	g. 4 centaines + 10 dizaines = ______
(8) 4568 – 1279 =	h. 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = ______
(9) 8967 – 2368 =	i. 6 centaines + 21 dizaines + 14 unités = ______

Evaluation diagnostique n°2	
Exercice 1 :	Exercice 2 :
(1) 7586 – 2523 =	a. 9 dizaines + 4 unités = ______
(2) 6573 – 241 =	b. 2 centaines + 8 dizaines + 5 unités = ______
(3) 9828 – 2456 =	c. 7 centaines + 8 unités = ______
(4) 8546 – 3255 =	d. 9 unités + 3 dizaines + 6 centaines = ______
(5) 5468 – 1209 =	e. 6 dizaines + 4 centaines = ______
(6) 4308 – 1257 =	f. 5 dizaines + 17 unités = ______
(7) 5469 – 758 =	g. 2 centaines + 10 dizaines = ______
(8) 7967 – 4588 =	h. 7 centaines + 14 dizaines + 5 unités = ______
(9) 9856 – 3257 =	i. 4 centaines + 23 dizaines + 13 unités = ______

Figure 7 - Exercices de l'évaluation diagnostique

Lorsqu'ils ont eu terminé leur test, j'ai récupéré les travaux des élèves pour les étudier. Ces documents m'ont, dans un premier temps, permis d'obtenir des informations globales sur le niveau de la classe, mais également d'analyser la répartition des erreurs des élèves lorsqu'il s'agissait de poser une soustraction. Cette analyse m'a permis dans un second temps de déterminer quels étaient les élèves pour lesquels les erreurs étaient en lien avec la retenue, et pour lesquels les activités de remédiation pourraient avoir un réel bénéfice, me permettant ainsi de constituer le groupe de besoins pour la séquence.

1.2. <u>Séance 1 : La soustraction pour calculer un écart entre deux nombres.</u>

Cette première séance a pour objectif de faire en sorte que les élèves perçoivent que l'un des sens de la soustraction est de calculer l'écart entre deux nombres. En effet, il est possible d'associer à la soustraction trois sens différents : le premier, qui semble le plus évident pour les élèves, est celui d'une diminution, par exemple : combien reste-t-il si l'on retire 37 à 45 ? Pour trouver le résultat, l'opération effectuée est 45 – 37 = 8, 8 étant le reste après avoir diminué 45 de 37. Mais la soustraction peut également permettre la recherche d'un complément : combien faut-il ajouter à 37 pour obtenir 45 ? Dans ce cas, l'opération effectuée est toujours la même, mais le résultat représente cette fois la valeur qui complète 37 et nous permet d'obtenir 45. Le troisième sens, qui est celui qui nous intéresse ici, est la recherche de l'écart ou de la différence entre deux nombres : de combien sont séparés 37 et 45 ? 8 représente bien ici l'écart entre les deux nombres. Il est essentiel que les élèves aient conscience de ce dernier, car cela va leur permettre de comprendre, par la suite, la raison pour laquelle appliquer l'écart constant dans une soustraction permet d'obtenir le résultat correct. Comprendre le sens de la soustraction comme l'écart entre deux nombres est une notion qui devrait en théorie être déjà maitrisée par des élèves de CM1, cette connaissance étant introduite tout au long du cycle 2 (Eduscol, 2016). Cette séance n'a donc pas pour ambition d'être une séance de découverte pour les élèves, mais une séance de familiarisation avec le matériel ainsi qu'une réactivation des connaissances nécessaires pour la suite de la séquence.

Au cours de cette séance, les élèves auront à résoudre des soustractions en n'utilisant que le matériel à leur disposition, c'est-à-dire 16 cubes « unités » et une bande numérique graduée de 0 à 60 : l'empilement construit avec les cubes représente le résultat de l'opération. Ce dernier, placé entre les graduations correspondant aux deux termes de l'opération, permet de matérialiser l'écart entre les deux nombres. La manipulation et l'étayage de l'enseignant ont pour objectif de permettre aux élèves de conceptualiser le résultat d'une soustraction comme la recherche du nombre de cubes qui les séparent, et donc l'écart entre les deux.

1.3. Séance 2 : L'écart constant.

La deuxième séance de cette séquence de remédiation a pour objectif de faire en sorte que les élèves découvrent et comprennent la notion d'invariance des écarts, c'est-à-dire le fait que d'ajouter la même valeur à chaque terme d'une soustraction n'en modifie pas le résultat. La séance 1 sur le résultat d'une soustraction comme recherche d'un écart entre deux nombres constitue un pré-requis à l'apprentissage de cette notion. Le matériel sert ici de support à la construction de cette connaissance : il ne s'agit pas uniquement de croire la parole de l'enseignant, mais d'observer la réalité de ce phénomène.

Dans un premier temps et uniquement en utilisant le matériel, il sera question pour les élèves de chercher plusieurs soustractions qui possèdent le même résultat. Ces opérations sont ensuite analysées, et les élèves pourront mettre en évidence que pour passer d'une opération à l'autre, la même valeur a été ajoutée à chaque terme. A l'aide d'exemples et de contre-exemples, ce constat est généralisé à l'ensemble des soustractions : si on ajoute ou retire la même valeur à chaque terme d'une opération, le résultat reste le même.

A la fin de la séance, la fiche d'exercice présentée en *figure 8* a été proposée aux élèves. Cette fiche comporte cinq opérations présentées sur le même modèle que lors des manipulations de la séance. Elles me permettront d'évaluer la compréhension des élèves quant au concept d'écart constant. Les élèves auront le matériel à disposition s'ils en ont besoin. Ils disposeront d'une vingtaine de minutes maximum pour compléter les différentes opérations.

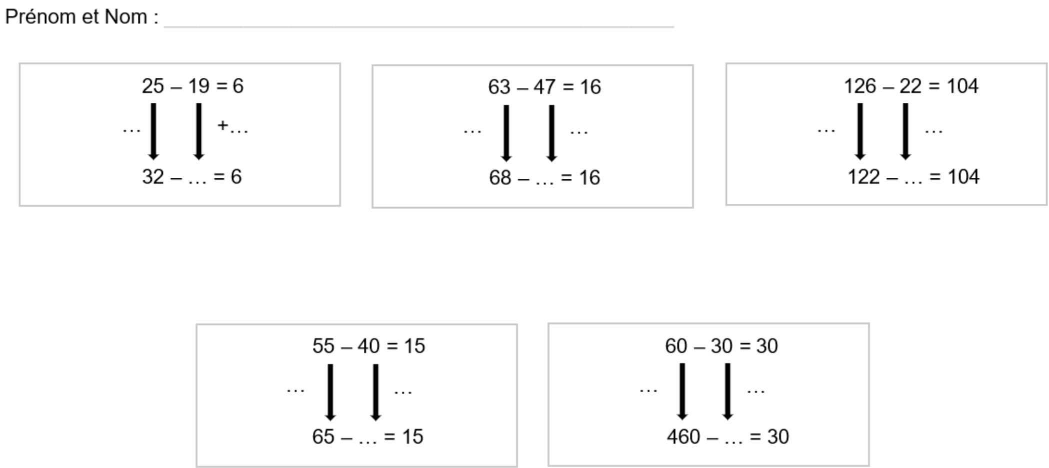


Figure 8 - Fiche d'exercice sur les écarts constants

1.4. Séance 3 : La soustraction avec la technique traditionnelle.

Les élèves n'ont pour le moment pas eu à poser d'opérations, et cela est l'objet de cette séance : elle consiste à mettre en lien la notion d'écart constant étudiée lors des deux séances précédentes et l'algorithme de la soustraction avec retenue posée avec la technique traditionnelle,

permettant ainsi d'amener les élèves à la maitrise de ce dernier. Pour cela, les activités se poursuivent avec le matériel en base 10 : les élèves ont manipulé ce matériel au cours des deux premières séances, il leur est donc familier. De plus, comme indiqué précédemment, ils ont pris l'habitude d'associer le résultat d'une soustraction à un écart puis de le vérifier sur la bande numérique. Ce procédé va être réinvesti lors de cette séance.
Les élèves travaillent par deux, et chaque binôme dispose de bandes graduées de 90 à 150, de 32 cubes « unités », de 22 barres « dizaines » et de 2 plaques « centaines ». A l'aide de ce matériel, ils vont pouvoir décomposer et visualiser les différentes étapes qu'il est nécessaire de réaliser lors de la résolution d'une soustraction, dans un premier temps sans retenue, puis avec retenue. Pour cela, les termes de chaque opération sont remplacés par leur équivalent en matériel base 10 : cette étape est essentielle car elle va ensuite permettre de mettre en évidence les relations entre l'algorithme et les principes positionnel et décimal de la numération, et va permettre aux élèves de réfléchir autour de la retenue, de sa valeur, et de sa position. Chaque chiffre possède une valeur qui dépend de sa position, c'est le principe positionnel de la numération : cet aspect est rendu visible par la substitution de chacun des termes par son équivalent en matériel. Les activités des séances précédentes justifient le fait d'ajouter une retenue au diminuende et une au diminuteur, puisque pour ne pas modifier le résultat d'une soustraction, il faut ajouter la même valeur aux deux termes. Ajouter dix unités d'un rang donné au diminuende nécessite d'en ajouter dix également au diminuteur. Compte tenu du principe décimal de la numération, dix unités d'un rang donné équivalent à une unité du rang immédiatement supérieur : le matériel de manipulation permet aux élèves de réaliser concrètement ces échanges, en permutant, par exemple, dix unités contre une dizaine. Le matériel permet ici de dépasser la difficulté que peut constituer l'écriture chiffrée dans la compréhension des manœuvres et des concepts convoqués dans la réalisation de l'algorithme.
Au début de l'activité, tous les nombres sont remplacés puis l'objectif est, qu'au cours de la séance, les élèves s'éloignent petit à petit du matériel en ne matérialisant plus que les retenues dans l'opération. L'objectif final est que les élèves n'en aient plus l'utilité et qu'ils ne recourent plus à celui-ci.

1.5. <u>Evaluation finale.</u>

Une évaluation finale est proposée aux élèves quelques jours après cette dernière séance. Les résultats permettront de comparer l'évolution des élèves entre le début et la fin de la séquence.

1.6. Nature des données recueillies.

L'expérimentation s'est déroulée avec un groupe de treize élèves pour lesquels l'application de l'algorithme de la soustraction avec retenue n'est pas systématiquement maitrisée. Comme indiqué précédemment, l'organisation de la classe et de l'emploi du temps ne m'a pas permis de séparer les élèves en deux groupes distincts, ce qui a rendu plus difficile de relever les procédures de chaque élève : j'ai fait le choix de privilégier la remédiation et l'accompagnement des élèves en difficultés face à la tâche demandée. J'ai malgré tout réussi à prendre quelques photographies qui viendront compléter mes observations globales quant à la compréhension d'une séance. Les données recueillies seront donc majoritairement issues de l'analyse des productions des élèves. Une analyse quantitative des productions d'élève de l'évaluation diagnostique m'a permis de déterminer les élèves pour qui l'application de la technique opératoire de la soustraction posée est source d'erreurs fréquentes. Une analyse qualitative du premier exercice a permis de mettre en évidence la nature de ces erreurs, et celle du second a déterminé si les principes positionnel et décimal étaient maitrisés par les élèves. L'analyse qualitative des travaux de la séance 2 permettra ensuite de déterminer si les élèves semblent être parvenus à comprendre le concept d'écart constant. Enfin, l'analyse quantitative des résultats de l'évaluation finale m'a permis d'effectuer une comparaison avec l'évaluation diagnostique et ainsi constater, de manière globale, si la séquence semble avoir réduit le nombre d'erreurs commises par les élèves. Cette analyse m'a également permis de constater si les erreurs en lien avec la retenue étaient moins fréquentes ou non. Pour les séances 1 et 3, n'ayant pas de productions d'élèves à analyser, mes conclusions se baseront sur une observation globale des élèves au cours des activités réalisées.

2. Analyse des données.

L'analyse a priori est un outil indispensable pour anticiper l'activité et la réaction des élèves face à celle-ci. L'analyse de l'évaluation et des séances proposées aux élèves va permettre de comprendre la manière dont elles visent les objectifs fixés. Un retour réflexif sur le déroulé de la séance et une analyse des productions d'élèves me permettra d'obtenir des données et des résultats qui me permettront de vérifier ou non mes hypothèses de départ.

2.1. Evaluation diagnostique

2.1.1. Analyse a priori.

Pour le premier exercice de cette évaluation diagnostique, j'ai décidé de proposer aux élèves des soustractions non posées, de manière à vérifier s'ils posent correctement leurs opérations et alignent leurs unités de même rang (erreurs liées à la présentation). J'ai également pris la décision de rester dans un champ numérique que les élèves sont censés maitriser, et ai donc décidé de n'utiliser que des nombres inférieurs à 10000, pour que ceux-ci ne représentent pas une difficulté supplémentaire pour les élèves. En revanche, ces derniers me permettent tout de même de proposer des nombres relativement éloignés les uns des autres, rendant impossible le recours à des procédures non expertes comme la *schématisation puis dénombrement* ou *comptage un à un* (par exemple sur les doigts), et permettent également de limiter les procédures de *calcul mental*. Dans ce premier exercice, les opérations sont proposées aux élèves dans un ordre croissant de difficulté :

- La première opération de chaque test (*8657 – 3352* et *7586 – 2523)* est une soustraction sans retenue. Les nombres sont tous les deux composés de quatre chiffres, ce qui ne pose en théorie aucun soucis aux élèves pour les aligner en fonction de leur rang. Elle va tout de même permettre de m'assurer que les élèves savent correctement poser une soustraction, notamment au niveau du nombre qu'ils inscrivent comme diminuende et celui qu'ils placent comme diminuteur, mais elle me permettra également de vérifier leur compréhension de la réalisation et du sens de l'opération.
- La deuxième opération de chaque test (*5736 – 421* et *6573 – 241*) est également une soustraction qui ne nécessite pas le recours à une retenue. En revanche, la difficulté ici réside dans le fait que le diminuende et le diminuteur ne sont plus composés du même nombre de chiffres. Les élèves vont devoir aligner correctement leurs unités de même rang pour résoudre l'opération, en lien avec le principe positionnel de la numération.
- A partir de la troisième opération de chaque évaluation (*8918 – 2456* et *9828 – 2456*), les soustractions proposées vont toutes nécessiter l'utilisation d'une retenue. Les opérations qui vont suivre vont être révélatrices d'un certains nombres d'erreurs citées dans la partie précédente, en lien avec le principe décimal de la numération, notamment la position de la retenue et la valeur qui lui est associée. Mais elles permettront aussi de vérifier que les élèves n'oublient pas de reporter une seconde retenue sur le diminuteur, si celle-ci est comptabilisée, ou encore s'ils n'intervertissent pas les chiffres pour effectuer le calcul.
- Les quatrièmes opérations (*9743 – 5351* et *8546 – 3255*) n'utilisent toujours qu'une seule retenue, en revanche, lors de l'ajout de celle-ci aux dizaines du diminuende, aucun indice ne permet de guider l'élève vers la valeur de celle-ci : si les élèves attribuent à la retenue ajoutée aux 4 dizaines la valeur de « 1 », l'opération pourra tout de même se poursuivre puisque le calcul 5 – 5 est possible à réaliser.

- Les cinquièmes (*4357 – 1208* et *5468 - 1209*) et sixièmes (*5409 – 1268* et *4308 – 1257*) opérations vont permettre respectivement d'analyser la gestion de la retenue lorsque le diminuteur ou le diminuende contiennent un chiffre zéro représentant l'ordre des dizaines.
- La septième opération (*4359 – 648* et *5469 – 758)* va permettre d'appréhender la gestion de la retenue lorsque le diminuende et le diminuteur ne sont pas du même ordre de grandeur.
- La huitième soustraction proposée aux élèves (*4568 – 1279* et *7967 – 4588*) met en jeu cette fois deux retenues à la suite, mais ce n'est pas l'ajout de la retenue qui provoque la nécessité d'en utiliser une seconde, contrairement à la neuvième opération (*8967 – 2368* et *9856 –3257*) où c'est l'ajout de la première retenue qui provoque l'obligation d'en introduire une nouvelle.

L'exercice 2 des évaluations permet de vérifier le niveau de maitrise des élèves par rapport aux principes positionnel et décimal de la numération. Il s'agit d'un exercice dans lequel les nombres sont proposés aux élèves sous forme de décomposition en unités de numération. L'objectif de cet exercice est de recomposer les nombres en écriture chiffrée.
Les cinq premières recompositions concernent l'aspect positionnel de la numération : il s'agit d'associer chaque unité de numération à son rang dans l'écriture chiffrée. Pour les deux premières de chaque test (*8 dizaines + 5 unités / 9 dizaines et 4 unités* et *1 centaine + 9 dizaines + 3 unités / 2 centaines + 8 dizaines + 5 unités*), juxtaposer les chiffres proposés permet de fournir la réponse correcte. En revanche, pour les trois suivantes cette procédure ne fonctionnera pas. En effet, pour les opérations c. (*6 centaines + 9 unités* et *7 centaines + 8 unités*), il n'y a pas d'unités à l'ordre des dizaines, et un élève qui écrirait simplement les chiffres à la suite sans considérer leur rang n'obtiendrait pas la bonne réponse. L'élève doit comprendre qu'il n'y a pas d'unité pour le rang des dizaines et alors inscrire un zéro. Pour cette question, les unités de rang étaient proposées dans l'ordre, or ce n'est plus le cas pour les deux suivantes. Dans l'opération d. (*7 unités + 2 dizaines + 4 centaines* et *9 unités + 3 dizaines + 6 centaines*), les unités sont proposées dans le désordre, mais sont toutes présentes, contrairement à l'opération e. (*3 dizaines + 6 centaines* et *6 dizaines + 4 centaines*) où l'élève devra remettre les unités de rang dans l'ordre et placer un zéro au rang des unités. Les réponses des élèves à ces questions vont permettre de déterminer s'ils maitrisent l'aspect positionnel de la numération, c'est-à-dire qu'ils sont capables de relier les unités de numération à leur rang dans l'écriture chiffrée.

Les quatre dernières questions de l'exercice permettent de mettre en évidence si, en plus du principe positionnel, les élèves ont compris et maitrisent le principe décimal de la numération. Pour cela, ils sont face à des situations qui nécessitent de faire des échanges entre les différentes unités de rang. Dans un premier temps, entre 10 unités et 1 dizaine comme dans la question f. (*2 dizaines + 15 unités* et *5 dizaines + 17 unités*) puis entre 10 dizaines et 1 centaines comme dans l'opération g. (*4 centaines + 10 dizaines* et *2 centaines + 10 dizaines*), avec une difficulté particulière pour celle-ci, étant donné qu'une fois cet échange effectué, il ne reste plus d'unités au rang des dizaines. La question h. (*5 centaines + 12 dizaines + 3 unités* et *7 centaines + 14 dizaines + 5 unités*) nécessite également un échange entre 10 dizaines et 1 centaine, la différence avec la dernière est qu'il y a des unités pour chaque rang. Et enfin, la question i. (*6 centaines + 21 dizaines + 14 unités* et *4 centaines + 23 dizaines + 13 unités*) nécessite elle deux échanges : 10 unités et une dizaine, ainsi que 20 dizaines et 2 centaines.

La procédure de juxtaposition n'est pas possible pour ces exercices hormis pour les deux premières questions, et les élèves vont donc devoir considérer les unités de rang indiquées pour pouvoir donner l'écriture chiffrée des nombres. Une des erreurs à prévoir est donc que les élèves utilisent tout de même cette procédure, montrant ainsi qu'ils ne maitrisent pas l'aspect positionnel de la numération. D'autres erreurs envisageables pourraient être que les élèves ordonnent correctement les unités de numérations, mais ne les positionnent pas au bon endroit dans le nombre et/ou ne placent pas de zéro dans les unités « vides ». Ce point est également révélateur d'une maitrise insuffisante de ce principe, de même que s'ils mettent plus d'un chiffre à chaque rang notamment pour les questions f, g, h et i. Ce dernier type d'erreur sera notamment révélateur d'une maitrise lacunaire du principe décimal de la numération.

2.1.2. Analyse des données de l'évaluation diagnostique.

L'évaluation diagnostique a été effectuée le lundi 14 décembre 2020.
Une lecture globale des évaluations en termes de réponses correctes ou non me permet d'avancer que sur les 23 élèves de la classe qui ont passé l'évaluation (1 absent), seuls trois ont résolu toutes les opérations sans erreurs et six n'en ont fait qu'une seule. De plus, quatre élèves ont commis une erreur dans la résolution des opérations sans retenue, c'est-à-dire sur les opérations 1 ou 2, ce qui semble indiquer que l'algorithme de la soustraction posée par la technique traditionnelle, même sans retenues, n'est pas acquis pour ces derniers.

Si l'on s'intéresse aux taux de réussite des différentes opérations (tableau 1), on constate que celles sans retenues sont considérablement mieux réussies (respectivement 20 et 21 élèves sur

23 ont correctement effectué les opérations 1 et 2) que les opérations avec retenue (au maximum 15 élèves sur 23 qui donnent la bonne réponse). Parmi celles-ci, les deux opérations qui nécessitaient d'utiliser deux retenues, c'est-à-dire la soustraction n°8 et la soustraction n°9, font partie des opérations les moins bien réussies par les élèves avec seulement 10 élèves sur 23 qui réussissent l'opération. Nous pouvons remarquer que ce nombre est identique à celui de l'opération n°5, qui elle, ne contenait qu'une seule retenue : ce taux inférieur aux autres semble indiquer que le fait que la retenue de cette opération se pose sur un zéro occasionne des difficultés chez les élèves. Or c'est également le cas de la retenue de l'opération n°6, qui a un taux de réussite bien plus élevé (15 élèves sur 23). L'opération n°7, qui nécessitait de placer la retenue à un rang où il n'y a pas d'unité, semble également avoir posé des difficultés aux élèves, avec seulement 11 élèves sur 23 qui donnent une réponse correcte.

Le tableau 1 ci-dessous répertorie les réussites des élèves. Pour chacun d'entre eux, il y est indiqué le numéro de l'évaluation qui lui a été proposée. Les colonnes 1 à 9 correspondent aux numéros des différentes opérations de l'évaluation.

Elève	EVALUATION	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Elève 1	1	1		1	1	1			1	
Elève 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
Elève 3	1	1	1	1	1		1	1		1
Elève 4	2	1	1	1	1	1	1	1		1
Elève 5	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elève 6	2	1	1	1	1		1			1
Elève 7	1		1	1	1		1			
Elève 8	1	1	1		1		1	1		
Elève 9	2	1	1	1	1	1	1		1	1
Elève 10	2	1	1	1	1	1	1		1	1
Elève 11	1	1	1	1			1	1	1	
Elève 12	ABS									
Elève 13	2	1	1							
Elève 14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
Elève 15	1	1	1							
Elève 16	2	1	1		1		1	1	1	1
Elève 17	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elève 18	1	1	1	1	1		1	1		1
Elève 19	2			1						
Elève 20	2	1	1							
Elève 21	2		1							
Elève 22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elève 23	1	1	1							
Elève 24	1	1	1			1				
Total de réussite (sur 23)		20	21	15	15	10	15	11	10	10

Tableau 1 - Résultats du test diagnostic

L'analyse des taux de réussites, ne donne qu'un aperçu global de l'évaluation, et ne permet pas de déterminer avec précision les difficultés et les besoins des élèves. Il est donc nécessaire de s'intéresser plus concrètement à la typologie des erreurs des élèves, et, lorsque cela est nécessaire, à leurs procédures. Pour cela, j'ai effectué un relevé des erreurs que j'ai rencontré lors de l'analyse des productions des élèves. Ces erreurs sont réparties entre quatre catégories, qui correspondent à celles décrites dans la partie théorique de ce travail : erreurs liées à la présentation de l'opération ; erreurs de calcul ; erreurs dans la réalisation de l'algorithme ; erreurs liées à la retenue. Les répartitions des erreurs sont référencées pour chaque opération dans le *tableau 2*. Les calculs erronés comportent parfois de multiples erreurs, et lorsque celles-ci concernent la même catégorie, elles n'ont été comptabilisées qu'une fois, signifiant, par exemple que le résultat de l'opération n'est pas correct en raison d'une ou plusieurs erreurs en lien avec les retenues. En revanche, lorsque les erreurs concernaient plusieurs catégories, elles ont été comptabilisées dans les deux : le résultat est incorrect compte tenu d'une erreur en lien avec la retenue et d'une erreur en lien avec le calcul. Le nombre d'opérations incorrectes a également été comptabilisé, ce qui permet de déterminer le pourcentage d'erreur d'un certain type, par exemple : 6,2% des opérations erronées contiennent des erreurs liées à la présentation. Comme indiqué précédemment, plusieurs types d'erreurs se retrouvent parfois dans la même opération, ce qui explique un total supérieur à 100%.

Soustraction	Nombre d'opérations erronées	Dû à des erreurs liées à la présentation	Dû à des erreurs liées au calcul	Dû à des erreurs liées à la réalisation de l'algorithme	Dû à des erreurs liées à la retenue
1	3	1	2		
2	2		2		
3	9		4		6
4	8	1	2		6
5	13	1	2	1	11
6	8		1		8
7	12	1	3		11
8	13		3		13
9	13	1	2		13
Totaux	81	5	21	1	68
	Taux d'opérations érronées contenant ce type d' erreurs (en %)	6,2	25,9	1,2	84,0

Tableau 2 - Catégorisation des erreurs par question

Au total, 81 opérations erronées ont été relevées sur les 207 effectuées (les 23 élèves ayant résolu chacun 9 opérations). Ce tableau 2 ci-dessus permet de nous apporter un grand nombre d'informations, et nous apporte un point de vue différent par rapport aux résultats précédents : nous nous étions interrogés quant à la maîtrise de l'algorithme par les élèves ayant commis des erreurs lors des opérations n°1 et n°2, qui je le rappelle, ne nécessitaient pas de retenues : on constate que les erreurs lors de la réalisation de ces opérations sont majoritairement en lien avec des erreurs de calcul. Aucune erreur liée à la réalisation de l'algorithme n'est relevée lors de ces deux opérations, et il me semble alors possible d'affirmer que les élèves de cette classe maitrisent et savent mettre en œuvre l'algorithme de la soustraction posée sans retenue. Au cours de l'évaluation, seul un élève a commis une erreur en lien avec la réalisation de l'algorithme lors de l'opération n°5 : cet élève a réalisé une addition au lieu d'une soustraction. Cette erreur n'apparait

qu'une fois et semble anecdotique. Elle ne remet pas en question, d'après moi, la capacité de cet élève à appliquer l'algorithme. Au vu de ces résultats, les élèves de cette classe semblent tous maitriser la technique opératoire de la soustraction sans retenue.
Ce que ces résultats permettent également de faire ressortir très clairement, est que la majorité des erreurs commises par les élèves impliquent la retenue. En effet, 84% des opérations incorrectes comportent des erreurs en lien avec cette dernière, ce qui semble confirmer le constat fait précédemment quant à la difficulté que représente l'utilisation de la retenue pour les élèves de cette classe. De plus, ces résultats semblent également confirmer que le fait de poser deux retenues est plus complexe pour les élèves que de n'en poser qu'une : lors de la résolution des opérations 8 et 9, 13 élèves sur 23 ont commis des erreurs en lien avec la retenue, contre 6 élèves pour les opérations 3 et 4. De même pour l'opération n°6, seuls 8 élèves sur 23 n'ont pas le résultat correct du fait de la retenue. En revanche, on remarque que le nombre d'erreurs liées à la retenue dans la soustraction n°5 diffère de ces valeurs, appuyant le contraste constaté avec les taux de réussites : 11 élèves sur 23 ont éprouvé des difficultés avec la retenue lorsque celle-ci était à placer sur un zéro au diminuteur. Ce nombre est identique à celui de l'opération n°7, dans laquelle la retenue ne se plaçait pas sur une unité « vide ». Poser la seconde retenue semble donc être plus complexe pour les élèves lorsque la situation n'est pas stéréotypée, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de la poser à un ordre qui ne possède pas d'unité. Comprendre les concepts sous-jacents à l'utilisation de la retenue, et notamment celui de l'écart constant pourrait permettre aux élèves de ne plus commettre ce type d'erreurs.
Ces taux semblent légitimer l'intérêt d'une remédiation autour de l'utilisation de la retenue, et je vais maintenant m'intéresser aux erreurs de chaque élève, de manière à déterminer quels sont ceux pour qui un travail de remédiation apporterait un réel bénéfice.

Le *tableau 3* est construit sur le même principe que le tableau 2 : les erreurs des élèves sont analysées et catégorisées en fonction du type auquel elles appartiennent. Certaines opérations comportent parfois plusieurs erreurs, qui, si elles appartiennent à la même catégorie ne sont référencées qu'une fois. Si ces erreurs appartiennent à différentes catégories, elles sont référencées une fois dans chaque catégorie auxquelles elles se rapportent. Prenons l'exemple de l'élève 21 : nous pouvons trouver dans sa production des erreurs en lien avec le calcul dans 6 opérations sur les 9 que cet élève a eu à résoudre. On retrouve également 7 opérations sur 9 qui comportent des erreurs liées à la retenue, ce qui signifie que l'élève a au minimum 4 opérations qui comportent à la fois des erreurs de type « calcul » et des erreurs de type « retenue ». Cet angle d'analyse a été préféré au dénombrement pour chaque opération de toutes les erreurs des élèves, car il s'agit de déterminer les élèves pour lesquels l'utilisation d'une retenue représente un obstacle à la résolution d'une soustraction. L'observation rapide du nombre d'opérations incorrectes en lien avec l'utilisation de la retenue permet immédiatement de statuer sur la participation, ou non, aux ateliers de remédiation pour la plupart des élèves : ceux n'ayant aucune ou qu'une seule faute ne semblent pas avoir besoin de remédiation pour appliquer l'algorithme correctement. Il est difficile de déterminer s'ils ont compris ou non le sens de la technique qu'ils appliquent, et les raisons pour lesquels ils effectuent les diverses manœuvres, mais cela ne semble pas leur faire obstacle lors de la résolution, et n'ont donc pas besoin de remédiation : ils font partie de ces élèves pour qui, appliquer l'algorithme sans le comprendre, fonctionne. A l'inverse, et en considérant que seulement sept des opérations proposées aux élèves impliquent des retenues, les élèves ayant quatre, ou plus de quatre opérations incorrectes à cause de ce type d'erreur (soit plus de la moitié des opérations avec retenue) pourraient, si mes hypothèses de travail s'avèrent exactes, tirer avantage de ces ateliers.

Elève	Erreurs liées à la présentation	Erreurs liées au calcul	Erreurs liées à la réalisation de l'algorithme	Erreurs liées à la retenue
Elève 1		1		3
Elève 2				1
Elève 3				2
Elève 4				1
Elève 5				
Elève 6	2			1
Elève 7	1			5
Elève 8				4
Elève 9				1
Elève 10				1
Elève 11		1	1	3
Elève 12				
Elève 13	1	1		6
Elève 14				1
Elève 15				7
Elève 16		2		
Elève 17				
Elève 18				2
Elève 19		3		5
Elève 20				7
Elève 21		6		7
Elève 22				
Elève 23	1	1		7
Elève 24		4		4

Tableau 3 - Répartition des erreurs de chaque élève.

En revanche, la décision parait moins évidente pour les quatre élèves restants (2 ou 3 opérations incorrectes pour une erreur de retenue), j'ai alors analysé plus attentivement leurs productions afin de déterminer s'ils pourraient tirer avantage d'une remédiation.

Les erreurs de l'élève 1 (*figure 9*) sont de trois natures différentes. Dans l'opération n°6, l'élève a correctement placé ses retenues, mais a omis de comptabiliser la seconde et a donc effectué l'opération *4 – 2 = 2*. Dans l'opération n°7, l'élève semble avoir éprouvé des difficultés à placer sa seconde retenue, celle-ci étant supposée être sous le « 4 ». Il l'a posé sur le « 6 » et a effectué l’opération *13 – 7 = 6*. Lors de la résolution de la soustraction n°9, l’élève a correctement placé ses retenues, mais n’a pas associé la valeur correcte à celles-ci. Il a effectué l’opération *(7+1) – 8 = 0*. Les erreurs des opérations n°7 et n°9 sont directement liées à l’application de la notion d’écart constant dans la technique opératoire de la soustraction avec retenue, et je pense que comprendre le sens de la retenue en lien avec celui-ci pourra être bénéfique à l’élève. J’ai donc décidé de l’intégrer à l’expérimentation.

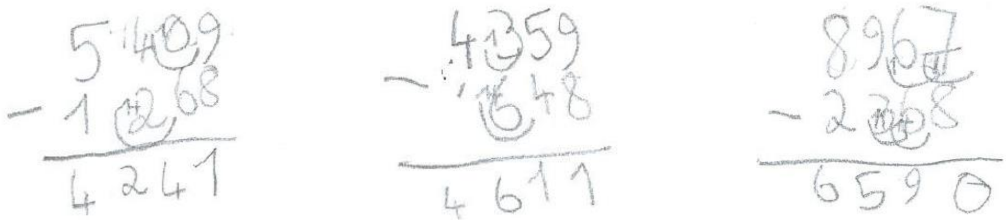


Figure 9 - Opérations 6, 7 et 9 de l'élève 1.

Contrairement à l’élève 1, l’élève 3 a effectué deux fois la même erreur dans les opérations n°5 et n°8 : comme nous pouvons l’observer sur la *figure 10*, il omet à deux reprises d’ajouter une dizaine au second terme de l’opération, ce qui ne lui permet pas d’assurer la conservation des écarts. La répétabilité de cette erreur la rend significative. De plus, cette dernière est en lien direct avec la notion d’écart constant et son application dans l’algorithme. Comprendre cette notion pourra peut-être aider l’élève à ne plus commettre cette erreur, il rejoindra donc également l’expérimentation.

Figure 10 - Opération 5 et 8 de l'élève 3

En ce qui concerne l’élève 11, nous pouvons constater sur la *figure 11* qu’au cours de la résolution de l’opération n°4, il n’a pas eu recours à la retenue alors qu’elle était nécessaire, il a effectué l’opération *4 – 5 = 0*, considérant certainement cette opération comme impossible. La soustraction n°5 a également posé un certain nombre de difficultés à cet élève : il a débuté par inscrire correctement sa retenue sur le 7 du diminuende puis sur le 0 du diminuteur, il a ensuite effectué l’opération *17 – 8 = 9*. Il m’est difficile de déterminer ce qu’a réellement effectué l’élève, la suite n’est donc qu’une interprétation de ma part : l’élève a associé la valeur de 10 à la retenue qu’il a placé sur le 0, et l’opération *5 – 10* n’étant pas réalisable, a placé une retenue sur le 5, en omettant d’en inscrire une seconde sur le 2. Il a ensuite effectué l’opération *15 – 10 = 6* en commettant une erreur de calcul. L'élève poursuit ensuite l'opération en effectuant des additions : *3 + 2 = 5* puis *4 + 1 = 5*. Un « 1 » se trouve devant le résultat, mon hypothèse étant qu'il s'agit de la retenue, mal positionnée, que l'élève semblait avoir oublié de positionner sur le « 2 » du diminuteur. Au cours de la résolution de l'opération n°9, l'élève a placé sa première retenue au niveau de son 7, mais n'a pas répercuté celle-ci sur le diminuteur. Cet élève a réalisé correctement 4 des opérations nécessitant l'usage d'une retenue, mais ses connaissances ne semblent pas stabilisées. Les opérations présentées ici comportent un grand nombre d'erreurs, et il me semble qu'il serait bénéfique pour l'élève de bénéficier d'une remédiation.

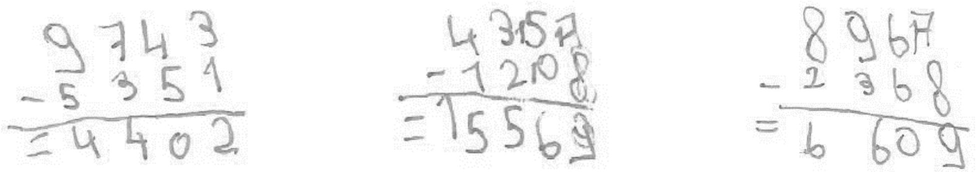


Figure 11 - Opération 4, 5 et 9 de l'élève 11

Enfin, sur la *figure 12*, nous pouvons observer que l'élève 18 ne répercute pas sa retenue sur le diminuteur dans l'opération n°5, mais effectue par la suite sa soustraction correctement. Dans l'opération n°8, il ajoute une retenue au 8 et ajoute la seconde sur le 7 puis effectue l'opération *18 – 9 = 9*. Il ajoute ensuite une retenue au 6 puis la répercute sur le 2 du diminuteur. Il oublie cependant de comptabiliser la retenue inscrite lors de l'étape précédente et effectue l'opération *16 – 7 = 9*. Oublier de compter une retenue est une erreur plutôt fréquente chez les élèves, mais ne requiert pas une remédiation, d'autant que les ateliers prévus n'apporteraient rien quant à cette omission. En revanche, ne pas reporter la retenue est une des erreurs que pourrait permettre de remédier les ateliers. Après concertation avec l'enseignante titulaire de la classe et consultation des travaux précédents de l'élève, il a été mis en avant que cette erreur est relativement fréquente chez l'élève, donc significative. J'ai alors décidé de l'intégrer aux ateliers de remédiations.

Figure 12 - Opération 5 et 8 de l'élève 18

Treize élèves participeront donc aux ateliers de remédiation : l'hypothèse qui est faite est que comprendre le sens de la retenue en lien avec le concept d'écart constant devrait leur permettre d'effectuer moins d'erreurs dans la résolution d'une soustraction posée.

Enfin, afin d'établir une comparaison avec l'évaluation finale, j'ai décidé d'affiner la catégorisation des erreurs de ces élèves, et ainsi déterminer quels aspects de l'utilisation de la retenue leur posent le plus de difficultés. Dans les productions de ces treize élèves, 77 erreurs de retenues ont été relevées (contre 84 pour la totalité de la classe : ils totalisent donc à eux treize, 92% des erreurs de retenue). Elles se répartissent telles que présentées sur la *figure 13* ci-dessous.

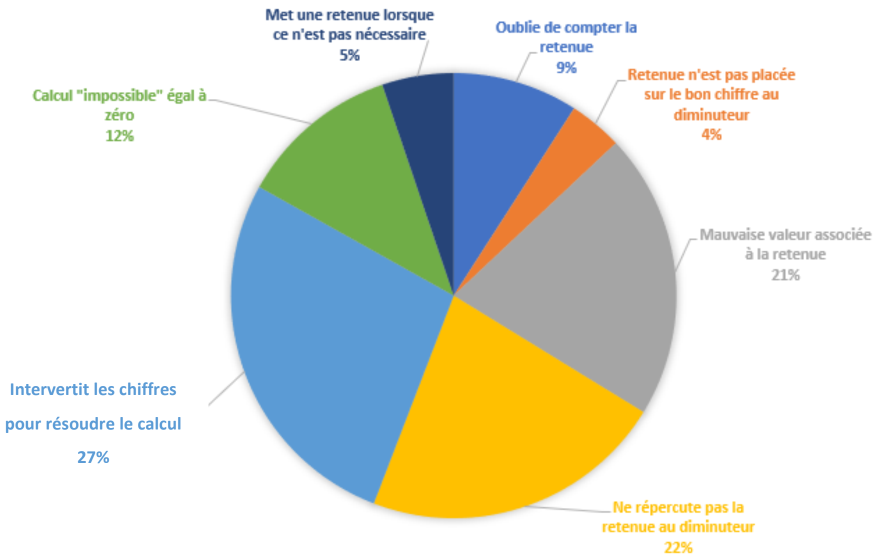


Figure 13 - Répartition des erreurs des élèves du groupe de remédiation

47% des erreurs rencontrées sont en lien direct avec la notion d'écart constant (la retenue n'est pas répercutée sur le diminuteur (17 erreurs sur 77 soit 22%) ; mauvaise valeur associée à la retenue (16 erreurs sur 77 soit 21%) ; la retenue n'est pas placée sur la bonne unité de rang du diminuteur (3 erreurs sur 77 soit 4%)) et 44% supplémentaires sont dues au rôle de la retenue qui semble incompris (intervertir les chiffres pour résoudre l'opération (21 erreurs sur 77 soit 27%) ; ne pas effectuer un calcul « impossible » (9 erreurs sur 77 soit 12%) ; mettre une retenue lorsqu'elle n'est pas nécessaire (4 erreurs sur 77 soit 5%)). Les 9% restants (7 erreurs sur 77) sont des oublis dans le comptage de la retenue. Ces données vont permettre de constater l'évolution de la répartition des erreurs des élèves entre l'évaluation diagnostique et l'évaluation finale, et il sera alors possible de déterminer si comprendre le sens et les procédés sous-jacents à son utilisation a permis de modifier ces différents taux.

L'évaluation diagnostique me permet également de déterminer la maitrise par ces treize élèves des aspects positionnel et décimal de la numération. Le tableau 4 ci-dessous présente les résultats de l'exercice n°2 de cette évaluation :

Elève	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Elève 1	1	1	1	1	1	1	1	1	
Elève 3	1	1	1	1	1	1		1	1
Elève 7	1	1	1	1	1	1			1
Elève 8	1	1	1	1	1		1	1	1
Elève 11	1	1	1	1					
Elève 13	1	1	1	1		1		1	
Elève 15	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elève 18		1	1		1			1	1
Elève 19		1	1	1					
Elève 20	1	1		1					
Elève 21	1	1							
Elève 23	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elève 24	1	1		1					
Total	11	13	10	11	7	6	4	7	6

Tableau 4 - Résultats de l'exercice n°2

L'élève 15 et l'élève 23 ont correctement répondu à la totalité des recompositions d'un nombre à partir de sa décomposition en unités de numération proposées aux élèves, nous pouvons donc considérer que les principes positionnel et décimal sont maitrisés par ces élèves.

Les élèves 1, 3, 7 et 8 ont donné la bonne réponse pour les cinq premières questions, ce qui indique qu'ils maitrisent l'aspect positionnel de la numération. En revanche, le maniement de l'aspect décimal n'est pas totalement acquis, et ces élèves commettent encore des erreurs en lien avec ce dernier. Les élèves 11, 19, 20, 21 et 24 n'ont pas été en mesure de donner les bonnes réponses pour aucune des quatre dernières réponses de l'exercice et ont tous systématiquement juxtaposé les différentes unités de rang qui leur étaient proposées : ils ne maitrisent pas l'aspect décimal de la numération. De plus, ils effectuent des erreurs sur les premiers calculs, qui ne mettaient en jeu que l'aspect positionnel de la numération, ce qui montre que cet aspect n'est pas pleinement acquis non plus. Enfin, les élèves 13 et 18 ont réalisé des erreurs dans quelques opérations portant sur l'aspect décimal, mais également dans certaines opérations ne mettant en jeu que l'aspect positionnel de la numération. La maitrise de ces notions semble incomplète, mais il semble intéressant d'analyser plus en détails leurs productions.

L'élève 18 a répondu 805 (*figure 14*). Cette erreur parait davantage liée à une confusion des mots de vocabulaire : l'élève a vu le mot « dizaine » et ne semble pas l'avoir compris. A la question suivante, le fait qu'il y ait centaines, dizaines et unités semble avoir permis de réactiver la connaissance et permis à l'élève de ne plus commettre cette erreur pour les questions suivantes. Il n'a pas répondu à la question d, et il est difficile de déterminer si cela est dû au fait qu'il n'a pas réussi à y répondre ou s'il a oublié de le faire. La connaissance des noms des unités de rang fait partie de l'apprentissage du principe positionnel, et je conviendrais alors d'une maitrise incomplète de cet aspect de la numération. Des erreurs ont été commises aux questions f et g où l'élève a juxtaposé les nombres, mais il a en revanche répondu correctement aux opérations h. et i. demandant des manipulations plus complexes. Je conclurais alors également à une maitrise insuffisante de l'aspect décimal de la numération.

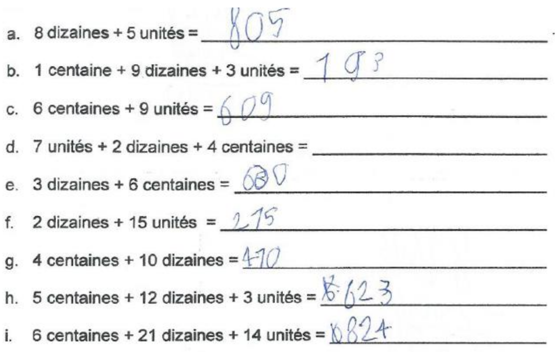


Figure 14 - Exercice 2 de l'élève 18

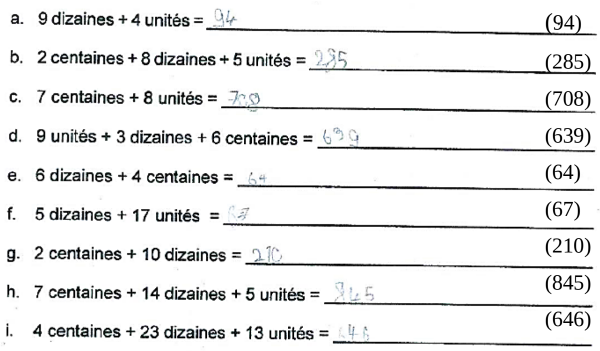


Figure 15 - Exercice 2 de l'élève 13

Sur la figure 15, nous pouvons voir que l'élève 13 a utilisé une procédure de juxtaposition pour répondre aux opérations e. et g. et a effectué une erreur dans l'opération i où il a indiqué 6 unités étant sans doute le résultat de la somme du « 3 » de 23 dizaines et du « 3 » de 13 unités. Comme pour l'élève précédent, il ne semble pas que les connaissances des principes positionnel et décimal ne soit pas maitrisées, en revanche, elles semblent fragiles. Nous pouvons constater que le principe décimal n'est que peu maitrisé par ces élèves. C'est un aspect essentiel lorsqu'il s'agit de l'utilisation de la retenue dans l'algorithme de la soustraction posée, et ces difficultés pourraient en partie expliquer les problèmes qu'ils rencontrent avec la compréhension et l'application de la technique opératoire de la soustraction traditionnelle.

2.2. Séance 1.

2.2.1. Analyse a priori.

Après lecture de l'article d'Anne-Marie Rinaldi, j'ai décidé de réaliser ce travail sur la notion d'écart à partir d'une bande numérique. En effet, elle affirme, que travailler la notion d'écart est plus facile lorsque « nous plaçons, même mentalement, les deux nombres a et b sur un axe numérique » (Rinaldi, 2013, p.7), d'où son choix de s'orienter vers une règle comme artefact pour ses activités autour de la notion d'écart constant. Pour ma part, et en prévision de la suite de ma séquence, j'ai décidé de me diriger non pas vers une règle graduée en centimètres, mais vers une bande numérique sans grandeur associée : il m'a semblé qu'il serait plus évident pour les élèves de passer à l'abstraction si aucune grandeur n'est associée aux nombres qu'ils manipulent. Les élèves auront en plus de cette bande numérique, des cubes « unité » d'un kit de matériel en base 10, dont la largeur correspond à une graduation de la bande numérique, de manière à pouvoir construire des empilements d'un nombre de cubes équivalent au nombre de graduation entre deux nombres.

Lors de cette séance, j'ai demandé aux élèves d'utiliser le matériel pour représenter le résultat des soustractions qui leurs sont proposées. N'ayant jamais utilisé ce matériel pour cet usage, il est possible que l'utilisation telle qu'elle est attendue ne soit pas spontanée, et on peut alors s'attendre à diverses procédures de la part des élèves :

- Procédure 1 : l'élève emboite un nombre de cubes correspondant au nombre le plus grand, puis retire le nombre de cubes souhaité pour obtenir le résultat.
- Procédure 2 : l'élève trouve le nombre le plus grand sur la bande numérique, puis retire le nombre de graduations qui correspond au plus petit nombre puis lit le résultat sur la bande numérique. Il construit ensuite la barre puis vérifie.
- Procédure 3 : l'élève place les cubes un par un en partant du plus petit nombre pour arriver au plus grand. Il compte ensuite le nombre de cubes.
- Procédure 4 : l'élève utilise la bande numérique pour trouver le résultat en comptant le nombre de graduations entre les deux nombres, puis construit sa barre et vérifie sur la bande numérique.
- Procédure 5 : l'élève calcule mentalement le résultat puis construit sa barre pour vérifier sur la bande numérique en la plaçant entre les nombres qui composent l'opération.

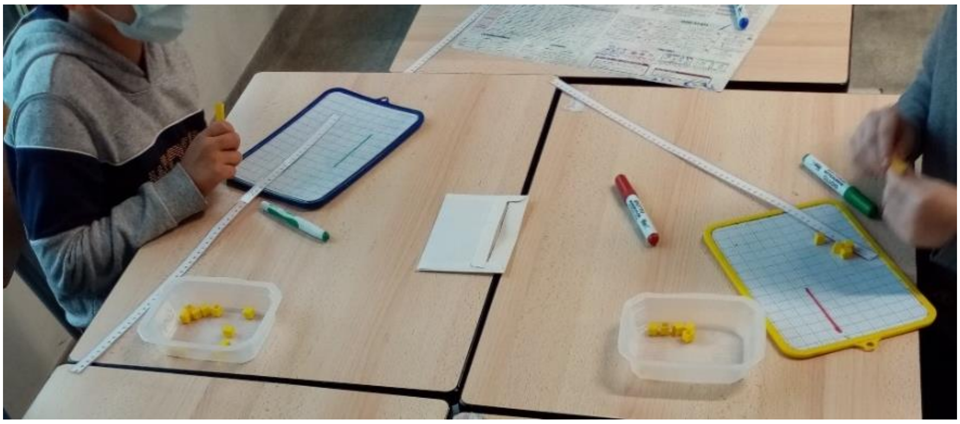
Les procédures 3, 4 et 5 montrent une compréhension du sens de la soustraction pour la recherche d'un écart entre deux nombres. En revanche, pour les procédures 1 et 2, l'élève associe la soustraction à une réduction. Il va donc falloir modifier les variables didactiques de cette activité, de manière à aider l'élève à envisager le résultat de la soustraction dans le sens de la recherche d'une différence entre deux nombres. Quelles sont les variables didactiques qui vont permettre aux élèves de faire évoluer leurs procédures ?

- Nature des nombres : le résultat sera plus aisé à calculer mentalement si un des deux nombres est un multiple de dix. Des nombres de ce type inciteront les élèves à calculer.
- Ecart entre les nombres : si on prend l'exemple de l'opération *56 – 52*. Un élève qui compte le nombre de graduations entre les deux nombres se lassera vite de décompter 52, d'autant plus pour une opération si simple. Il se rendra vite compte que sa méthode est chronophage, et fera évoluer sa procédure vers l'une des trois attendues.
- Nombre de cubes disponibles : prenons le même exemple que précédemment *56 – 52*. Les élèves ne disposent que de 16 cubes, il leur sera alors impossible de construire une barre de 52. Ils devront alors eux aussi faire évoluer leurs procédures.

L'objectif étant de faire évoluer progressivement les procédures des élèves et en considérant ces différents paramètres, les opérations proposées aux élèves seront : *16 – 9* ; *30 – 20* ; *35 – 19* ; *39 – 32* ; *57 – 42* ; *56 – 52* et *59 – 43*. Le résultat des opérations est systématiquement inférieur à 16, ce qui permet aux élèves de pouvoir utiliser le matériel pour vérifier sur la bande numérique, en revanche les nombres des opérations sont de plus en plus grand, ce qui permet de limiter l'utilisation des procédures 1 et 2 pour les faire évoluer vers les procédures 3, 4 ou 5.

2.2.2. Analyse des données de la séance n°1.

La consigne donnée aux élèves était de « *construire une tour de cube qui représente le résultat de l'opération 16 – 9, puis de vérifier ce résultat sur la bande numérique* ». Pour résoudre ce problème, trois procédures ont été observées chez les élèves : dans une majorité des cas, c'est une procédure de calcul mental qui a été utilisée, c'est-à-dire que les élèves ont calculé le résultat mentalement, puis ont construit une tour du nombre de cubes correspondant. Lorsque j'ai demandé à ces élèves de me montrer comment ils vérifiaient ce résultat sur la bande numérique, ils ont tous placé la tour entre la graduation 0 et la graduation 7, en me disant que le résultat était effectivement 7, puisque la tour qu'ils avaient construite mesurait 7 cubes. Même après leur avoir fait remarquer que leur démarche ne vérifiait pas le résultat de l'opération 16 – 9, mais uniquement la taille de la tour, aucun d'entre eux n'a pensé à placer la barre entre les deux graduations pour effectuer la vérification attendue. La deuxième procédure que j'ai pu observer a été la n°1, qui consistait à construire une tour de 16 cubes, pour lui en retirer 9. De même, lorsqu'il s'agissait de vérifier ce résultat avec la bande numérique, les élèves mesuraient la longueur de la tour pour confirmer ce qu'ils avaient compté. Une dernière procédure, que je n'avais pas envisagée lors de mon analyse a priori, a été celle de calculer mentalement la réponse, puis de tracer à l'aide de la bande numérique, un segment allant des graduations 0 à 7 (*photo ci-dessous).* Après avoir tracé ce segment, les élèves ont construit une tour de 7 cubes et ont effectué la comparaison entre les deux pour vérifier leur résultat.



Les élèves ont tous obtenu le résultat correct, mais aucun d'entre eux ne l'a associé à l'écart entre les deux nombres. Cette difficulté avait été envisagée, raison pour laquelle cette phase de recherche a été suivie par une mise en commun où j'ai moi-même effectué un empilement de 16 cubes que j'ai aligné avec les graduations, puis ai retiré les 9 premiers en m'aidant de la bande numérique, ne laissant que les cubes qui se trouvent entre les graduations 9 et 16. J'ai ensuite compté les cubes qui me restaient. J'ai demandé aux élèves d'effectuer la même démarche que moi et de conclure quant au lien entre la tour et la bande numérique. Après un temps d'observation et un fort étayage, un élève en a conclu que « *la tour rentre entre le 9 et le 16* ». Ils ont ensuite donc pu être mis en avant que la tour, qui est le résultat de l'opération, représente *l'écart* entre les deux nombres de l'opération. Contrairement à ce qui était prévu dans ma préparation, j'ai décidé de faire un nouvel exemple à l'oral et en collectif, avec l'opération *25 – 20*. L'opération est aisément résolue mentalement par les élèves qui ont ensuite vérifié le résultat sur leur bande numérique en plaçant leur tour entre les graduations 20 et 25. Cette fois, lorsque que je leur ai posé la question de savoir ce que représentait la tour, ils m'ont répondu que cette tour représentait l'écart entre 20 et 25, que cette tour mesurait 5 cubes, qui est le résultat de l'opération 25 – 20. Les opérations suivantes ont été inscrites au tableau, et les élèves ont pu s'exercer à cette manière de procéder. Après cette phase collective, certains élèves se sont immédiatement dirigés vers la procédure n°5 pour résoudre les opérations. D'autres en revanche ont tout de même poursuivi avec la procédure n°2, alors même qu'il s'agissait de plus grands nombres et il m'a fallu les accompagner plus longuement, pour qu'ils acceptent de modifier leur procédure. La résolution s'est avérée plus longue que prévue pour certains élèves, et j'ai eu à ajouter de nouvelles opérations pour les élèves les plus rapides.
A la fin de la séance, en me basant sur mes observations et les échanges que j'ai pu avoir avec les élèves, je peux affirmer que la moitié du groupe associe la soustraction à la recherche d'un écart entre deux nombres, du moins, dans le cadre de cette séance. Il m'est en revanche impossible de déterminer si cette connaissance sera transposée dans un autre contexte (je pense notamment à la résolution de problèmes soustractifs). Pour le reste des élèves, ils utilisaient finalement l'une des trois procédures souhaitées et effectuaient correctement les vérifications avec la bande numérique, mais il est difficile de déterminer s'ils ont réellement compris, ou s'ils appliquaient ce qui était attendu d'eux dans le cadre de cette activité.

2.3. Séance 2.

2.3.1. Analyse a priori.

Lors de la première séance, les élèves ont eu l'occasion de se familiariser avec le matériel de manipulation qu'ils vont réutiliser dans cette séance sur la notion d'écart constant : ils associent l'empilement de cubes à l'écart entre les deux nombres, et savent l'associer à la bande numérique pour obtenir ou vérifier un résultat. Au cours de celle-ci, ils auront à utiliser le matériel à leur disposition pour mettre en lien deux soustractions ayant le même résultat, c'est-à-dire ayant le même écart entre leurs deux termes. La tour de cube sert ici encore de matérialisation de l'écart entre les nombres.

La notion d'écart constant est difficile à concevoir pour les élèves, c'est la raison pour laquelle elle est abordée avec le matériel : les élèves ne doivent pas uniquement accepter ce concept, mais peuvent l'expérimenter et le visualiser. Pour la phase de découverte, des petits nombres sont utilisés, puis la notion est progressivement étendue.

Lors de la phase d'application, les élèves vont avoir à établir le lien entre deux opérations de même résultat. Deux éléments sont demandés à l'élève dans cet exercice : on demande de déterminer l'écart entre les deux opérations, mais également le nombre manquant dans la seconde.

25 – 19 = 6
… ↓ ↓ …
32 – … = 6

Différentes procédures sont à prévoir :

- Procédure 1 : l'élève construit une barre de 6 cubes et la place sur la bande numérique avec son extrémité sur 32. Il détermine de cette manière le deuxième terme de l'opération.
- Procédure 2 : l'élève effectue *32 – 6* pour obtenir 26.
- Procédure 3 : l'élève calcul la différence entre 25 et 32, puis ajoute 7 à 19 pour obtenir 26 (avec ou sans matériel).

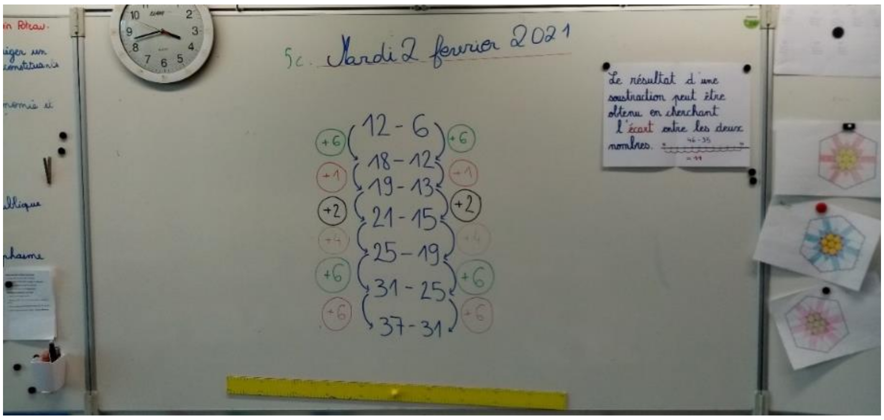
Les procédures 1 et 2 ne mettent pas en jeu la notion d'écart constant évoquée précédemment, mais uniquement celles de la séance 1. Pour m'assurer que les élèves aient compris cette notion, il me faut modifier les variables didactiques qui sont les suivantes :

- Nombre de cubes disponibles : si les nombres se trouvent sur la bande numérique, le résultat des soustractions proposées doit être supérieur à 20 pour que les élèves ne puissent plus utiliser les cubes.
- Nombres se trouvant sur la bande numérique ou non : si les nombres ne sont pas situés sur la bande numérique, l'élève devra effectuer des calculs pour trouver ses réponses.
- Ecart entre les nombres : si la différence entre les deux nombres est conséquente, l'élève n'utilisera pas la procédure n°2.

En considérant ces différents paramètres, les opérations proposées aux élèves seront : *25 – 19 → 32 - ... ; 63 - 47 → 68 - ... ; 126 - 22 → 122 - ... ; 55 – 40 → 65 - ... ; 60 – 30 → 460 - ...*
Pour cet exercice, il n'a pas été laissé un temps illimité aux élèves, mais uniquement 20 à 25 minutes maximum : seules cinq opérations sont proposées aux élèves et si la notion d'écart constant a été comprise par les élèves, cet exercice ne demande que très peu de temps. J'ai considéré qu'un élève ne sachant pas compléter les opérations en plus de 20 minutes ne saura pas le faire, même avec plus de temps.

2.3.2. <u>Analyse des données de la séance n°2.</u>

Lorsque j'ai demandé aux élèves de trouver d'autres opérations de même résultat, certains ont été très réactifs et ont immédiatement utilisé le matériel pour répondre à la question, ce qui confirme qu'ils ont assimilés les notions de la séance n°1. Ils ont ensuite été capables d'expliciter leur procédure aux élèves qui éprouvaient des difficultés à comprendre ce qui était demandé, nous permettant d'aboutir à une liste de sept opérations : *12 – 6* ; *18 – 12* ; *19 – 13* ; *21 – 15* ; *25 – 19* ; *31 – 25* et *37 – 31*.
Comme je l'avais envisagé lors de ma préparation, mettre en relation les différentes opérations n'a pas été spontané chez les élèves. Il m'a fallu fortement les guider pour mettre en avant le lien entre les deux premières opérations, mais ils ont ensuite réussi à déterminer seuls les suivantes. Cependant, il m'a semblé qu'ils calculaient séparément la valeur qui a été ajoutée à chaque terme des soustractions, sans prendre conscience que celle-ci était la même. Ce constat s'est confirmé lorsqu'il a été question d'en déduire le concept d'écart constant. Les élèves cherchaient davantage un algorithme du type « *au début on a ajouté 6, puis 1, puis 2, puis 4, puis 6 et ensuite on recommence du départ* », et j'ai dû apporter moi-même la conclusion quant à l'ajout de la même valeur. Travailler sur sept opérations en même temps semble les avoir induits en erreur, et introduire le concept d'invariance des écarts en n'utilisant que deux soustractions à la fois, comme cela a ensuite été fait, aurait peut-être été plus judicieux.



Pour la suite des activités, j’ai pu observer chez les élèves deux attitudes bien distinctes : une première moitié de la classe pour laquelle la tâche semblait « *trop facile* » (pour reprendre leurs propres mots) et l’autre moitié totalement découragée face à cette notion que les élèves ne comprenaient pas, même avec un fort étayage.

Le constat effectué au cours de la séance semble se confirmer avec l’analyse des productions. Tout d’abord, quatre élèves sur douze (+1 absent, l’élève 19) ont entièrement complété la fiche d’exercice sans erreurs (élèves 3, 8, 18 et 23). Ces élèves semblent avoir compris les activités du jour, et le fait que pour obtenir une opération de même résultat, la même valeur devait être ajoutée ou soustraite aux deux termes. Ils ont su se détacher du matériel pour trouver les réponses et étendre cette notion à des nombres plus grands : le concept d’écart constant semble compris. L’élève 13 quant à lui a répondu correctement aux deux premières opérations, mais n’a pas su se détacher du matériel pour effectuer les suivantes. Il a compris ce qui était attendu dans l’activité et a compris la procédure à utiliser pour trouver le résultat avec le matériel, mais le fait qu’il ne sache pas effectuer les opérations sans matériel semble indiqué qu’il a possiblement compris le concept sous-jacent à l’activité, c’est-à-dire la notion d’écart constant, mais que cette dernière n’est pas encore maitrisée ou en cours d’acquisition.
Les sept autres élèves n’ont donné aucune réponse correcte, et les activités n’ont pas permis de les faire accéder à la compréhension du concept de l’invariance des écarts. Il est cependant possible de séparer ces élèves en deux groupes distincts, révélant un niveau de compréhension différent. Parmi ces sept élèves, trois (les élèves 7, 11 et 21) ont retenu qu’il était nécessaire d’ajouter la même valeur des deux côtés, mais n’arrivent tout de même pas à faire le lien entre les deux opérations comme le montrent les exemples ci-dessous, où les élèves ont trouvé le terme manquant de l’opération à l’aide du matériel et de la procédure des séances 1 et 2, mais n’arrivent pas à faire le lien entre les deux opérations comme on peut le constater sur la figure 16 ci-dessous.
Parmi les quatre élèves restants (figure 17), trois ne sont pas parvenus à comprendre qu’il fallait ajouter la même valeur et ajoutent une valeur différente à chaque nombre (élèves 1, 15, 20). Enfin, l’élève 24 n’a répondu à aucune question.

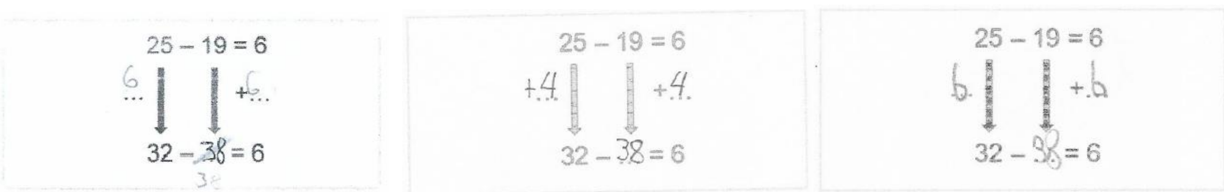


Figure 16 - Ecart constant des élèves 7, 11 et 21

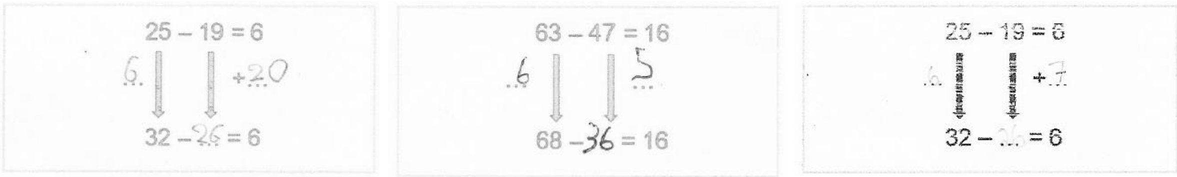


Figure 17 - Ecart constant des élèves 1, 15 et 20

2.4. Séance 3.

2.4.1. Analyse a priori.

Cette dernière séance se poursuit avec l'utilisation du matériel en base 10 : les élèves ont manipulé ce matériel au cours des deux premières séances, il leur est donc familier. De plus, comme indiqué précédemment, ils ont désormais l'habitude d'associer le résultat d'une soustraction à un écart puis de le vérifier sur la bande numérique. Ce procédé va être réinvesti lors de cette séance. Les élèves n'ont pour le moment pas eu à poser d'opérations, c'est l'objectif ici. Pour cette activité, les élèves ont alors à résoudre plusieurs soustractions avec retenue en s'appuyant, pour cela, sur du matériel de numération. Quelles sont alors les variables didactiques sur lesquels il va être possible d'agir pour amener les élèves vers la maitrise de la soustraction posée avec retenue sans l'aide de matériel ?

- Dans un premier temps, il sera possible de proposer aux élèves des opérations qui nécessitent le recours ou non à l'utilisation d'une retenue ;
- Il sera également possible d'agir sur la taille des nombres proposés aux élèves ;
- Et enfin, intimement lié au point précédent, nous pourrons influer sur la quantité de matériel fourni aux élèves.

Lors de la première phase d'activité, les élèves ont à résoudre l'opération *149 – 142*. Les nombres utilisés sont relativement petits pour les élèves de CM1 et ne devraient alors pas poser de difficultés particulières. Les élèves disposent d'assez de matériel pour remplacer la totalité des chiffres des deux termes de l'opération. Cette opération n'a pas besoin d'une retenue pour sa résolution, les élèves maitrisent tous, en théorie, la technique opératoire sans retenue (cela a été vérifié lors de l'évaluation diagnostique), et cette étape ne présente pas d'obstacles particuliers. Elle est effectuée en collectif, l'objectif étant que les élèves comprennent ce qui se passe lorsqu'ils résolvent une soustraction, et qu'ils comprennent ce qu'ils vont avoir à réaliser par la suite.

La deuxième phase d'activité nécessite de résoudre une soustraction avec retenue : 143 – 137. Les nombres sont toujours relativement petits, et les élèves disposent toujours du matériel nécessaire pour remplacer l'entièreté des chiffres de l'opération. En revanche, la technique opératoire de la soustraction avec retenue n'est pas acquise pour ces élèves, et la résolution de cette opération peut alors donner lieu à deux procédures correctes :

- Procédure n°1 : l'élève représente les retenues avec le matériel de manipulation : il ajoute 10 cubes unités au rang des unités de son diminuende, et une dizaine au rang des dizaines de son diminuteur.
- Procédure n°2 : l'élève ajoute avec son feutre une retenue au rang des unités puis au rang des dizaines, puis réalise l'opération en considérant cette dernière.

Les élèves ne maitrisant pas l'algorithme de la soustraction posée, cette étape peut occasionner un certain nombre d'erreurs précédemment énoncées et donnant lieu à des résultats erronés. Le matériel de manipulation fourni aux élèves leur donnera l'occasion de vérifier leur résultat à la manière de ce qui a été fait au cours des séances 1 et 2, et ainsi réviser leur procédure si celle-ci est incorrecte. Mais le matériel de numération peut également être à l'origine d'un certain nombre d'erreurs de la part des élèves : la retenue, lorsqu'elle est écrite, est représentée par un « 1 », peu importe sa place dans le nombre. Comment alors la matérialisée ici ? Il se peut que les élèves mettent un cube unité sur le « 3 » du diminuende ainsi qu'un second sur le « 3 » du diminuteur ; il se peut également que les élèves mettent dix cubes au niveau du diminuende et un seul au niveau du diminuteur ou une barre dizaine au diminuende et un cube au diminuteur, etc.

L'intérêt du matériel dans cette situation est qu'il donne la possibilité aux élèves de s'éloigner de l'écriture chiffrée, parfois abstraite, pour visualiser concrètement la véracité de leurs résultats. Les différentes procédures, même incorrectes, sont testées en collectif à l'aide du matériel et la vérification permet d'éliminer au fur et à mesure les procédures qui ne fonctionnement pas, de manière à aboutir à la seule solution exacte, qui correspond à la procédure n°1 précédemment évoquée. Le parallèle est effectué avec la procédure n°2 et les retenues symbolisées par un « 1 » : il est possible de visualiser la raison pour laquelle on considère une valeur de 10 à la retenue du diminuende et une valeur de un à la retenue du diminuteur.

Dans la dernière phase d'activité, le but est d'amener les élèves à résoudre, sans utiliser le matériel de numération, les différentes opérations qui leur sont proposées. Il faut pour cela modifier les variables didactiques de manière que l'utilisation de matériel ne soit plus envisageable dans les procédures des élèves. Quelles sont les procédures que peuvent mettre en œuvre les élèves pour résoudre une soustraction avec retenue ?

- Procédure n°1 : l'élève utilise le matériel pour représenter les unités, les dizaines, les centaines et les retenues des deux nombres qui interviennent dans l'opération.

- Procédure n°2 : l'élève utilise le matériel pour représenter les unités, les dizaines et les centaines des deux nombres qui interviennent dans l'opération, mais indique les retenues en écriture chiffrée.
- Procédure n°3 : l'élève n'utilise le matériel que pour matérialiser les retenues.
- Procédure n°4 : l'élève résout l'opération sans utiliser le matériel de manipulation.

Pour faire évoluer les procédures 1, 2 et 3 vers la procédure 4, il va falloir agir sur la taille des nombres, ainsi que sur la possibilité d'utiliser le matériel :

- L'opération 546 – 239 : pour cette opération, la première retenue se situe sur les unités. En revanche, les procédures n°3 et 4 ne sont pas envisageables : les élèves ne disposent pas d'assez de matériel pour représenter les nombres.
- L'opération 1234 – 173 : dans cette opération, la première retenue est à l'ordre des dizaines. De même que précédemment, les procédures n°3 et 4 ne sont pas réalisables. Le champ numérique pour cette opération est supérieur à 1000.
- L'opération 5178 – 2856 : la première retenue se trouve ici à l'ordre des centaines. Les procédures n°3 et 4 ne sont toujours pas utilisables, mais cette fois, la procédure n°2 ne l'est plus non plus : les élèves ne disposent pas de bloc « millier » pour représenter leur retenue, et vont donc être contraints d'écrire leurs retenues.

2.4.2. Analyse des données de la séance n°3.

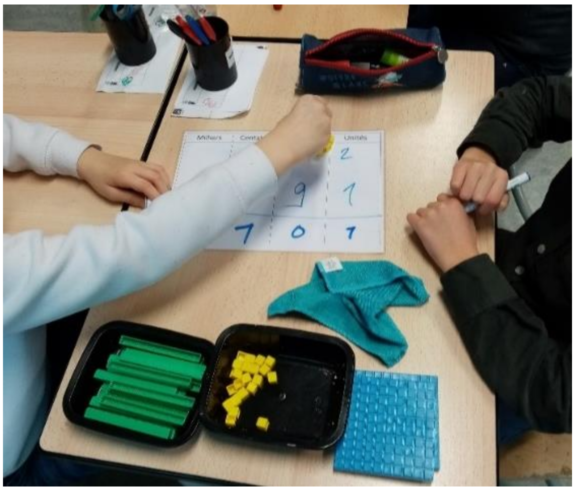
Les élèves n'ont eu, au cours des séances précédentes, qu'à utiliser les unités du kit en base 10, de plus, l'utilisation de ces derniers a été détournée pour en faire des « constructions ». Les élèves disposent cette fois de dizaines et de centaines en plus des unités, ils connaissent ce matériel de numération mais n'ont pas l'habitude de le manipuler : cela a rendu la première étape, qui consistait à représenter les nombres des opérations par leur équivalent en matériel de numération, moins évidente que ce que j'avais pu imaginer. Il m'a fallu, avant que chaque binôme ne sache effectuer le remplacement, réaliser un rappel de ce que représente chaque élément, ainsi qu'un rappel du fonctionnement du tableau de numération et la manière dont les deux pouvaient se compléter. Une fois ces rappels effectués, le remplacement n'a plus posé de difficulté pour les groupes.

Au cours de la résolution de la première opération avec retenue, j'ai laissé les élèves en recherche, et ai observé leurs procédures : aucun des sept binômes n'a immédiatement utilisé une procédure correcte. Quatre groupes ont ajouté une unité au diminuende et une dizaine au diminuteur ; deux groupes n'ont ajouté qu'une unité au diminuende en omettant d'ajouter une retenue au diminuteur ; un groupe a ajouté une dizaine au diminuende. Certaines procédures erronées ne permettent pas d'obtenir de résultat, et les élèves ont donc cherché une façon d'obtenir une opération qui pourrait sembler correcte. Dans cette phase de recherche, le travail en binôme s'est avéré particulièrement utile : les échanges entre les élèves ont été très constructifs. Ils discutaient leurs points de vue et de la manière dont ils auraient procédé. J'ai entendu à de multiples reprises des élèves qui avaient une nouvelle idée, expliquer cette dernière à leur binôme. Trois des groupes ont pensé à utiliser la bande numérique pour vérifier leur résultat à la manière de ce qui avait été fait au cours des deux séances précédentes. A la fin de cette phase, seul un groupe a trouvé le bon résultat, mais sans utiliser l'une des procédures correctes : les élèves avaient ajouté une dizaine au diminuende et au diminuteur.

La mise en commun s'est déroulée en grande majorité avec les échanges des élèves, qui sont parvenus par eux même à mettre en place la procédure correcte. Cette procédure a d'ailleurs été appliquée par tous les binômes lorsqu'il a fallu par la suite résoudre l'opération 134 – 126. Mes interventions au cours de cette phase ont permis de compléter ce qui avait été dit par les élèves, notamment sur la raison pour laquelle on ajoute une retenue au diminuende ainsi qu'une seconde au diminuteur.

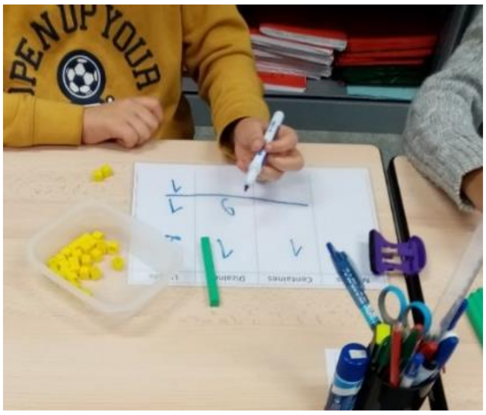
Pour résoudre l'opération suivante 112 – 91, qui nécessite une retenue qui ne s'ajoute non pas sur l'unité du diminuende mais sur sa dizaine, trois procédures ont été observées : deux groupes ont immédiatement transposé ce qui avait été vu précédemment, et ont ajouté dix dizaines et une centaine pour obtenir le bon résultat (binôme formé des élèves 1 et 19 et ainsi que l'élève 18 qui était seul pour l'activité). Les autres groupes ont éprouvé plus de difficultés, et n'ont pas réussi à appliquer ce qui venait d'être vu. Une première surprise a été de constater que même s'ils avaient encore la possibilité de le faire pour cette opération, tous les groupes ont écrit leur opération en chiffres plutôt que de la représenter avec le matériel. Cela ne leur avait pas été explicitement demandé, mais il s'agit d'une des deux écritures qui avait été inscrite au tableau pour faire la transition entre la représentation de l'opération avec le matériel et l'opération en écriture chiffrée.

Sur la photographie ci-dessous, nous pouvons constater que les élèves ajoutent dix unités aux dizaines du diminuende. Ils semblent avoir appliqué la même procédure que celle mise en place pour ajouter une retenue sur l'unité du diminuende, sans l'adapter à l'opération réalisée. Le fait qu'ils aient obtenu le résultat *101* indique qu'ils n'ont pas répercuté la retenue au diminuteur, et ont effectué une erreur de calcul : $11 - 9 = 0$. Ces élèves n'ont pas compris le principe de l'écart constant, et il semble que la maitrise insuffisante des aspects positionnel et décimal de la numération ne leur permet pas d'adapter la procédure mis en avant précédemment à la situation concernée. Le matériel permet ici aux élèves de matérialiser que la retenue ajoutée au diminuende « a une valeur de 10 », mais le fait que cette opération soit effectuée avec des unités démontre que ces élèves n'ont pas compris les concepts sous-jacents à l'utilisation de la retenue dans la réalisation d'une soustraction posée avec la technique traditionnelle.



Le transfert à l'identique de la procédure qui avait été mise en place pour une retenue sur l'unité a été observé dans deux autres groupes, la retenue ayant été répercutée sous forme d'une dizaine sur la centaine du diminuteur. Cette erreur pourrait trouver son explication de deux façons : la première hypothèse serait de supposer que ces élèves ne savent pas utiliser le matériel qui leur est proposé. Ils n'associent pas les cubes à des unités, mais à des éléments quelconques qu'ils ajoutent pour matérialiser une retenue et le fait que cette dernière ait une valeur de dix. Le fait qu'ils aient correctement remplacé, par le matériel de numération, les nombres des opérations précédentes ne semble pas en adéquation avec cette hypothèse. La seconde hypothèse serait de supposer que les élèves ne maitrisent pas le principe décimal de la numération, et ne procèdent pas aux « échanges » entre les différentes unités de rang. Le fait que les élèves aient utilisé l'écriture chiffrée plutôt que le remplacement des chiffres par le matériel ne permet pas de me positionner quant à l'une ou l'autre des propositions, et ne permet pas non plus aux élèves d'autoréguler leurs procédures. J'ai alors demandé aux élèves de procéder à ce remplacement, et ainsi leur permettre de se rendre compte de leur erreur. Cela a permis à l'un de ces trois groupes de modifier sa procédure et d'ajouter dix dizaines et non plus dix unités, puis de poursuivre l'opération correctement. Cela semble indiquer que même si des erreurs sont encore commises avec l'écriture chiffrée, les principes positionnel et décimal de la numération sont compris pour les élèves de ce groupe, et le fonctionnement de l'algorithme également. Il s'agit en effet du groupe binôme formé par les élèves 8 et 15, qui avaient démontré une bonne compréhension de ces principes au cours de l'évaluation diagnostique. Contrairement à eux, les deux autres groupes ont tout de même continué à ajouter dix unités et non dix dizaines (élèves 11 et 20 et élèves 13 et 21). Le lien avec l'évaluation diagnostique permet de rappeler que ces élèves ne semblaient pas maitriser les principes positionnel et décimal de la numération : ce point se confirme au cours de cette séance, où même avec l'aide du matériel, ces élèves n'effectuent pas d'échange entre les différentes unités de rang, et ne semble pas comprendre la différence de valeur qu'implique le fait qu'un chiffre se situe dans l'un ou l'autre de ces rangs.

Les deux derniers groupes n'ont pas ajouté d'unités, et ont compris qu'il fallait ajouter des dizaines. En revanche, comme cela est visible sur les photographies ci-dessous, ils n'en ont ajouté qu'une seule au lieu de dix.



Certains autres groupes n'ont également ajouté qu'une retenue sur le diminuende, et cette erreur semble indiquer que les élèves n'ont pas compris le concept d'invariance des écarts qui a été étudié au cours de la séance n°2. Ces groupes ont correctement effectué la correspondance entre dix unités et une dizaine, puisqu'il ne s'agissait non plus d'ajouter une retenue au rang des unités mais au rang des dizaines. Le principe décimal semble donc maitrisé. Mais le fait qu'ils n'aient ajouté qu'une seule dizaine semble indiqué qu'ils ont également transposé la situation précédente, mais en effectuant la conversion, et qu'ils n'ont donc pas compris le fonctionnement de l'algorithme. Le groupe de la seconde photographie (binôme formé de l'élève 7 et l'élève 24) a lui répercuté une seconde retenue au diminuteur. Le fait que cette retenue ait été matérialisée par une centaine semble indiquer une bonne maitrise des aspects positionnel et décimal. Le fait qu'ils n'aient ajouté qu'une retenue au diminuende et au diminuteur semble en revanche indiquer qu'ils n'utilisent pas le concept d'écart constant. De même que pour les premiers groupes, j'ai demandé à ces élèves de procéder au remplacement des nombres par leur équivalent en matériel de numération. Cela leur a permis de se rendre compte de leur erreur, mais ils n'ont tout de même pas réussi à mettre en place la procédure correcte.

L'hétérogénéité s'est avérée relativement importante dans ce groupe, et alors que certains binômes ont effectué très rapidement les opérations suivantes, la fin de l'activité a été particulièrement complexe pour d'autres groupes, qui n'arrivaient pas à se détacher du matériel, même avec un étayage important.

2.5. Evaluation finale.

2.5.1. Analyse a priori.

Les élèves ont repassé la même évaluation que lors du test diagnostic, de manière à assurer l'objectivité de la comparaison entre les deux évaluations : la seule différence avec l'évaluation de départ est la séquence de remédiation qui a eu lieu. Les potentielles évolutions en termes de résultat pourront être attribuées à l'efficacité de celle-ci pour les élèves, et non à d'éventuels « pièges » ou difficultés présentes ou non dans l'une ou l'autre des évaluations.

2.5.2. Analyse des données de l'évaluation finale.

L'évaluation finale a eu lieu le 8 février 2021. Lors de cette évaluation, les élèves 13 et 21 étaient absents, et il n'a pas été possible de leur faire passer l'évaluation à leur retour en classe. Les données suivantes concernent donc les onze élèves qui ont pu passer l'évaluation.
Un aperçu général des résultats de cette évaluation permet de constater les progrès des élèves en ce qui concerne la résolution de soustractions par la technique opératoire traditionnelle. Le tableau 5 ci-dessous reprend les résultats de l'évaluation diagnostique pour les onze élèves ayant participé à l'évaluation finale. Le tableau 6 présente leurs résultats à l'évaluation finale.

Elève 1	1		1	1	1			1	
Elève 3	1	1	1	1		1	1		1
Elève 7		1	1	1		1			
Elève 8	1	1		1		1	1		
Elève 11	1	1	1			1	1	1	
Elève 13									
Elève 15	1	1							
Elève 18	1	1	1	1		1	1		1
Elève 19			1						
Elève 20	1	1							
Elève 21									
Elève 23	1	1							
Elève 24	1	1			1				
Total	9	9	6	5	2	5	4	2	2

Tableau 5 - Résultats de l'évaluation diagnostique des élèves du groupe de remédiation

Elève	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Elève 1	1	1	1	1	1	1	1	1	
Elève 3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elève 7		1	1	1	1		1	1	1
Elève 8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elève 11		1	1		1		1	1	
Elève 13									
Elève 15	1			1	1	1	1		1
Elève 18	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elève 19	1								
Elève 20	1	1							
Elève 21									
Elève 23	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elève 24		1							
Total	8	9	7	7	8	6	8	7	6

Tableau 6 - Résultats de l'évaluation finale des élèves du groupe de remédiation

Au regard des totaux de bonnes réponses pour chaque opération, on peut immédiatement constater que les taux de réussites sont plus élevés pour toutes les opérations proposées aux élèves, sauf étonnamment, pour la première où trois élèves ont donné une réponse erronée, en comparaison à deux dans l'évaluation diagnostique. L'analyse de ces opérations me permet de dire que ces erreurs sont des erreurs de calculs liés à la méconnaissance des résultats de base. Pour les opérations 5, 8 et 9 qui avaient particulièrement posés des difficultés aux élèves lors de la première évaluation, on remarque des taux de réussite trois à quatre fois plus élevés lors de l'évaluation finale, se rapprochant ainsi des taux de réussite des autres opérations. Pour l'opération 7, le nombre d'élèves qui ont répondu correctement a doublé. On peut également remarquer que quatre élèves de ce groupe ont correctement effectué la totalité des opérations proposées (il s'agit des élèves 3, 8, 18 et 23), alors qu'aucun d'eux n'y était parvenu lors de l'évaluation diagnostique. Ces résultats semblent relativement parlant, et semblent indiquer globalement une meilleure mise en pratique de l'algorithme de la soustraction avec retenue.

Il me semble désormais intéressant d'étudier à la répartition des erreurs, comme cela avait été fait pour l'évaluation diagnostique (*tableaux 7 et 8*).

Elève	Erreurs liées à la présentation	Erreurs liées au calcul	Erreurs liées à la réalisation de l'algorithme	Erreurs liées à la retenue
Elève 1		1		3
Elève 3				2
Elève 7	1			5
Elève 8				4
Elève 11		1	1	3
Elève 13				
Elève 15				7
Elève 18				2
Elève 19		3		5
Elève 20				7
Elève 21				
Elève 23	1	1		7
Elève 24		4		4

Tableau 7 - Répartition des erreurs de l'évaluation diagnostique

Elève	Erreurs liées à la présentation	Erreurs liées au calcul	Erreurs liées à la réalisation de l'algorithme	Erreurs liées à la retenue
Elève 1		1		
Elève 3				
Elève 7		1		1
Elève 8				
Elève 11		2		2
Elève 13				
Elève 15		2		2
Elève 18				
Elève 19		1		7
Elève 20				7
Elève 21				
Elève 23				
Elève 24		7		5

Tableau 8 - Répartition des erreurs de l'évaluation finale

Les élèves de ce groupe effectuent encore de nombreuses erreurs de calcul, notamment en lien avec la connaissance des résultats de base. En revanche, aucunes erreurs liées à la présentation ou à la réalisation de l'algorithme n'ont été relevées dans cette évaluation finale. Cinq élèves sur les onze de ce groupe n'ont effectué aucune erreur en lien avec les retenues. Parmi eux, les quatre précédemment cités qui ont correctement résolu la totalité des opérations, et l'élève 1 qui n'a commis qu'une erreur de calcul lors de l'opération n°9.

Malgré les trois séances qui ont eu lieu, les élèves 19, 20 et 24 éprouvent encore de nombreuses difficultés avec l'application de la retenue dans la technique opératoire de la soustraction posée, comme le montre la confrontation entre les tableaux 6 et 8 : les élèves 19 et 20 ont eu faux aux sept opérations nécessitant l'utilisation d'une retenue, et toutes le sont à cause d'erreurs en lien avec la retenue. Ces deux élèves n'ont utilisé la retenue dans aucun de leurs calculs, comme cela avait déjà été le cas lors de l'évaluation diagnostique. Pour ces élèves, les trois séances de remédiation n'ont pas eu d'impact dans la compréhension et l'utilisation de l'algorithme de la soustraction posée avec retenue : lorsqu'il s'agit d'une étape du calcul nécessitant l'ajout d'une retenue, l'élève 19 inscrit systématiquement zéro comme résultat, sans faire intervenir de retenue. L'élève 20, lui, intervertit les termes du calcul pour réaliser ses opérations. Ces élèves sont en grande difficulté et ne savent pas utiliser l'algorithme de la soustraction avec retenue. La séquence mise en place n'a malheureusement pas permis de les aider.

Le constat est un peu plus nuancé pour l'élève 24 (*figure 18*) qui a, comme ses camarades, les sept dernières opérations erronées, dont cinq dû à une erreur de retenue. Cet élève n'a pas utilisé de retenue pour répondre aux opérations 5 à 9, ce qui pourrait laisser supposer qu'il n'a pas compris le fonctionnement de la retenue, et ne sait donc pas l'utiliser. Or, si nous regardons les deux premières opérations présentées ci-dessous, on constate que cet élève a tout de même utilisé la retenue, qui plus est correctement : celle-ci est posée lorsque la situation le nécessite, les deux retenues sont inscrites et ces dernières sont situées à la bonne place dans le nombre. L'élève semble savoir associer la valeur correcte à chaque retenue comme nous pouvons le constater dans le calcul 4 où l'élève a correctement effectué 14 – 5 = 9. Au regard des différentes opérations posées par l'élève, un point m'interpelle en particulier : il n'a terminé ni le calcul n°3, ni le n°4. Il n'a pas effectué le calcul n°5 et a très maladroitement effectué les calculs de 6 à 9 en effectuant de considérables erreurs de calcul (par exemple 9 – 8 = 4).

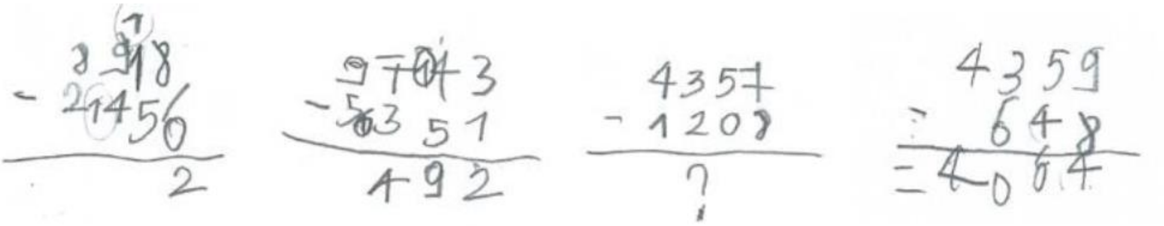


Figure 18 - Opérations 3, 4, 5 et 7 de l'élève 24

L'élève semble s'être découragé, et avoir renoncé à réaliser la tâche qui lui était demandée : il semble avoir compris comment fonctionne la retenue, mais cette connaissance n'est peut-être pas entièrement maîtrisée. L'utilisation de la retenue semble être en cours d'acquisition au moment de l'évaluation terminale, et plus de temps de manipulation aurait peut-être permis à l'élève d'accéder à la maitrise de celle-ci.

L'élève 7 quant à lui n'a effectué qu'une seule erreur de retenue dans l'évaluation finale contre cinq au cours de l'évaluation diagnostique. Cet élève n'a pas répercuté la seconde retenue au diminuteur : comprendre l'écart constant devait permettre aux élèves de ne plus commettre cette erreur. Si l'on considère les résultats de la séance n°2, cet élève n'a pas compris cette notion, ce qui explique qu'il lui arrive encore de produire cette erreur. Cet élève avait déjà réalisé ce type d'erreur au cours de l'évaluation diagnostique, les autres étant des erreurs en lien avec la valeur attribuée à la retenue. Dans cette évaluation, il n'a pas reproduit cette erreur, ce qui semble tout de même indiquer que les séances de remédiation lui ont été bénéfiques.

Les élèves 11 et 15 ont tous deux réalisé deux erreurs en lien avec la retenue, alors qu'ils en avaient respectivement effectué trois et sept. Pour l'opération n°9, l'élève 11 a ajouté une retenue au diminuteur alors que celui-ci n'en nécessitait pas et que, de plus, il n'en avait pas ajouté au diminuende. Sa seconde erreur a été de ne pas ajouter de retenue pour résoudre l'opération n°6, et d'intervertir les chiffres pour la résoudre. Pour le reste, les retenues sont correctement utilisées, les deux sont inscrites et les bonnes valeurs leurs sont associées. Cet élève a compris et sait utiliser les retenues, mais il semble parfois revenir à des tâches plus aisées pour lui. Ce même constat est fait pour l'élève n°15 (*figure 19*) : nous pouvons remarquer des progrès entre les deux évaluations, et l'élève a réussi, au cours de l'évaluation finale, à effectuer sans erreurs cinq soustractions avec retenue. Au cours de l'évaluation diagnostique, cet élève avait démontré une mauvaise gestion de la retenue : en effet, il semblait ajouter une retenue à tous les ordres des deux termes de l'opération. Certaines de ces retenues étaient comptabilisées au cours du calcul et d'autres non, et la bonne valeur leur était associée ou non : dans l'opération 3, on constate que l'élève a ajouté une retenue sur le 8, le 9 et le 1 du diminuende et sur le 2 et le 4 du diminuteur. Pour obtenir le résultat 15562, l'élève a effectué les opération 8 – 6 = 2, puis 11 – 5 = 6 (bon emplacement et bonne valeur associée à la retenue), il a ensuite effectué 19 – 14 = 5 (ne nécessitait pas de retenue et mauvaise valeur associée à la retenue du diminuteur) et enfin il a effectué 18 – 3 = 15. On constate que la retenue est parfois mise lorsqu'elle n'est pas nécessaire et qu'elle n'a pas toujours la bonne valeur associée. Il a parfois été difficile de déterminer les procédures utilisées par l'élève, mais ses erreurs semblent signifier qu'il ne sait pas utiliser la retenue dans la soustraction posée.

Figure 19 - Opérations 3 et 4 de l'évaluation diagnostique de l'élève 15

Au cours de l'évaluation finale, l'élève a démontré qu'il avait compris et savait correctement utiliser la retenue, mais a tout de même reproduit, lors de la résolution de l'opération n°8 (*figure 20*), la même erreur que celle décrite précédemment : 7 – 8 nécessite l'usage d'une retenue, et l'élève a donc ajouté une retenue au 7, puis a reporté cette retenue sur le 8 du diminuteur, puis a ensuite effectué l'opération 17 – 8 = 9. L'opération 6 – 9 n'était pas réalisable, il a alors ajouté une retenue au 6, puis a reporté cette dernière sur le 5 du diminuteur. A l'opération 16 – 9, l'élève a répondu 3. Il a été difficile de déterminer la raison de cette réponse, mais l'hypothèse la plus probable à mon sens serait que l'élève ait effectué 9 – 6, c'est-à-dire qu'il a comptabilisé la retenue présente sur le 8 mais pas celle sur le 6, puis a intervertit les termes pour réaliser son opération. Il a ensuite poursuivi et ajouté une retenue sur le 9 du diminuende alors que l'opération 9 – 6 était réalisable. Il n'a pas répercuté cette retenue au diminuteur et a obtenu 7, ce qui me laisse penser qu'il a certainement associé une valeur de 10 à la retenue située au diminuteur, puis effectué 15 – 9 = 7, en inversant les nombres et en commettant une erreur de calcul. L'élève a ensuite ajouté une retenue au 7 du diminuende, puis a effectué l'opération 17 – 4 = 13.

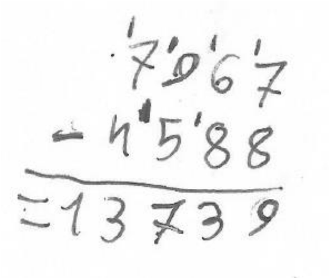


Figure 20 - Opération 8 de l'évaluation finale de l'élève 15

Au cours de cette opération, l'élève 15, de même que l'élève 7 et 24 présentés précédemment semble avoir compris le fonctionnement de la retenue, et le fait qu'il sache correctement l'utiliser dans cinq opérations sur sept semble aller dans ce sens. Pour ces trois élèves, la connaissance semble n'être pas assez installée pour être systématique. Appliquer l'algorithme de la soustraction traditionnelle avec retenue semble encore difficile pour eux : ils savent le faire, mais cela leur demande un effort important de concentration et de réflexion. Face à cette forte charge cognitive, les élèves semblent revenir à des procédures plus faciles pour eux.

Dans la totalité des opérations, 24 erreurs de retenues ont été relevées : 14 des 24 erreurs sont effectuées par seulement deux élèves, l'élève 19 et l'élève 20 qui, comme nous l'avons vu précédemment, ont respectivement et systématiquement inscrit zéro pour indiquer un résultat « impossible » et ont inversé les chiffres de l'opération. Les dix erreurs restantes, de même que lors de l'évaluation diagnostique, sont en majorité que les élèves ont intervertit les chiffres de l'opération (6 sur 10). 2 erreurs sur 10 sont liées à l'écriture d'une retenue lorsqu'elle n'est pas nécessaire. Une erreur est une retenue qui n'est pas répercutée au diminuteur, et la dernière est une mauvaise valeur associée à la retenue. Lors de l'évaluation diagnostique, ces deux dernières catégories totalisaient à elles deux 33 sur les 77 erreurs commises par les élèves du groupe de remédiation, soit environ 43%. Ces différents taux ont considérablement diminué par rapport à la première évaluation, et semblent indiquer une meilleure gestion de la retenue par les élèves de ce groupe.

3. Résultats.

La première hypothèse pour ce travail de recherche était de savoir si la manipulation pouvait permettre aux élèves de comprendre la notion d'écart constant, notion en temps normal si difficile à comprendre pour eux. L'analyse des productions d'élèves de la séance n°2 permet de conclure et infirmer notre hypothèse n°1 de départ. En effet, malgré les deux séances de manipulations qui ont eu lieu, il n'a pas été possible de faire comprendre ce concept aux élèves. Cette conclusion est évidemment à nuancer car quatre des élèves de ce groupe ont tout de même compris cette notion (élèves 3, 8, 18 et 23), et ont ensuite réussi à l'appliquer sans le matériel. Il ne s'agit là que d'une minorité du groupe, et il n'est pas possible de déterminer si ces élèves auraient également compris sans le support matériel. De plus, il n'est pas assuré qu'avec plus de séances, les autres élèves de la classe n'auraient pas, eux aussi, compris le concept d'invariance des écarts. Une bonne maitrise des aspects positionnel et décimal de la numération semble pouvoir avoir un impact sur cette compréhension étant donné que les élèves 3, 8 et 23 qui maitrisaient ces principes ont également compris l'écart constant. En revanche, les élèves 1 et 15 maitrisent aussi ces deux principes, mais ne sont pour autant pas parvenus à comprendre la notion d'invariance des écarts. Enfin, l'élève 18 a lui compris l'écart constant, alors même que sa maitrise des principes positionnel et décimal était lacunaire. Ces éléments permettent de pointer une des limites de ce travail de recherche puisqu'en effet, les élèves en difficulté en numération ont bénéficié des mêmes séances de remédiations que leurs camarades pour lesquels ces différentes compétences étaient maitrisées. Des séances préliminaires consacrées aux aspects positionnel et décimal de la numération auraient peut-être pu permettre aux élèves d'aborder les différents ateliers avec plus d'aisance, et ainsi modifier la conclusion qui est faite ici quant à la première hypothèse de ce mémoire. De plus, la mise en place de séances supplémentaires entre les séances 2 et 3 auraient pu permettre de prolonger les manipulations sur la notion d'invariance des écarts, et ainsi, peut-être permettre à un plus grand nombre d'élève d'accéder à la compréhension de ce concept.

La deuxième hypothèse était de savoir si la manipulation pouvait permettre aux élèves de comprendre comment l'écart constant, par l'utilisation de la retenue, s'applique à l'algorithme de la soustraction traditionnelle en lien avec les aspects positionnel et décimal de la numération. Il est particulièrement difficile de conclure quant à cette hypothèse puisque seuls quatre élèves de la classe semblent avoir compris l'écart constant. Les erreurs en lien avec l'écart constant avaient été définies comme étant la retenue non-répercutée sur le diminuteur, la mauvaise valeur associée à la retenue et la retenue qui n'est pas placée sur la bonne unité de rang du diminuteur. Si l'on regarde la répartition des erreurs des élèves au cours de l'évaluation diagnostique : l'élève 3 avait effectué deux erreurs où il ne répercutait pas les retenues au diminuteur. L'élève 8 quant à lui avait effectué deux erreurs où il n'associait pas la valeur correcte à la retenue. L'élève 18 n'avait pas répercuté sa retenue sur le diminuteur et l'élève 23 avait à quatre reprises associé la mauvaise valeur à la retenue. Ces quatre élèves n'ont reproduit aucune de ces erreurs au cours de l'évaluation finale, ce qui semble indiquer que cette hypothèse pourrait s'avérer correcte. Nous pouvons donc, toutes précautions gardées, considérer que cette hypothèse n°2 est validée.

La dernière hypothèse de ce travail consistait à savoir si comprendre le sens et la valeur de la retenue, en lien avec la notion d'écart constant, allait aider les élèves à utiliser et mémoriser l'algorithme de la soustraction traditionnelle. De même que précédemment, les conclusions sont à prendre avec du recul car elles ne concernent que les quatre élèves qui ont compris la notion d'invariance des écarts. Ces élèves ont tous les quatre réussi à poser correctement toutes les opérations de l'évaluation terminale, ce qui semble confirmer l'hypothèse formulée. En revanche, l'élève 1 a également correctement effectué toutes les opérations, or, ce dernier n'avait pas compris l'écart constant. De plus, les résultats d'autres élèves se sont également considérablement améliorés, sans qu'ils aient eux non plus compris cette notion. La manipulation semble donc avoir été un support de remédiation efficace pour les élèves, et revoir la technique opératoire de la soustraction avec ce dernier semble les avoir aidés à comprendre et à appliquer correctement l'algorithme. Il est donc difficile de déterminer si, pour les quatre élèves ayant compris l'écart constant, la réussite à l'évaluation découle de la compréhension de l'écart constant ou de la décomposition de l'algorithme avec le matériel de manipulation. Même si cet élément semble avoir joué un rôle, il ne m'est pas possible de conclure quant à l'hypothèse n°3 sur l'efficacité de la compréhension de l'écart constant pour l'application de l'algorithme de la soustraction posée par la technique traditionnelle. En ce qui concerne la mémorisation de l'algorithme de la soustraction, il m'est impossible de conclure quant à cette partie de l'hypothèse. En effet, le dispositif qui a été mis en place ne comprend que trois séances, et il est alors impossible de déterminer si ce dernier aura des effets à long terme pour les élèves, et s'ils ont effectivement réellement mémorisé les notions étudiées au cours des séances de remédiation.

4. <u>Conclusion.</u>

Lorsque j'ai débuté ce travail de recherche autour de la soustraction posée avec retenue, j'ai très vite réalisé la difficulté que pouvait représenter cet enseignement : quel choix effectuer en tant que professeur ? Faire le choix de la technique traditionnelle signifie demander aux élèves d'être capable d'appliquer un algorithme dont ils ne comprennent pas le sens, et même si cela peut s'avérer fonctionner pour certains, il est inenvisageable d'imaginer que cela soit le cas pour tous : certains élèves ont besoin de comprendre pour apprendre, et c'est cette possibilité qu'offre la technique par cassage. En revanche, cette dernière cause aussi sa part d'inconvénients, notamment lorsqu'il s'agira par la suite de poser des divisions. Quel choix effectuer alors ? Les programmes eux-mêmes ne se positionnent pas sur ce point, et cette décision repose donc sur la liberté pédagogique des enseignants.

Dans la classe où j'ai réalisé mon stage, les élèves utilisaient la technique traditionnelle de la soustraction posée, et cela m'a alors permis de me poser la question de savoir s'il était possible d'aider les élèves à maitriser l'algorithme de la soustraction posée par la technique traditionnelle, et ainsi dépasser les difficultés qu'induit son utilisation. La retenue semble être la source des difficultés des élèves avec l'algorithme, c'est donc en lien avec celle-ci qu'il faut agir : il faut apporter à la retenue, et plus généralement à l'algorithme, le sens qu'il lui manque.

La retenue, dans la méthode traditionnelle de la soustraction, se base sur la notion d'invariance des écarts, qui s'applique à l'algorithme en lien avec les principes positionnel et décimal de notre système de numération écrit chiffré. Comprendre cette notion devrait alors permettre aux élèves de comprendre l'algorithme, et par la suite de l'appliquer correctement. La manipulation de matériel pédagogique et didactique est une pratique reconnue comme particulièrement performante pour les apprentissages et la remédiation, et c'est donc assez naturellement que ma problématique pour ce travail de recherche s'est orientée vers la manipulation pour permettre une remédiation efficace dans l'application de la soustraction posée avec retenue.

Ma séquence expérimentale avait donc pour objectif de déterminer que la manipulation pouvait donner du sens à la technique de la soustraction traditionnelle, mais malheureusement, après avoir mis en place les différentes séances d'activité, cette question reste toujours sans réponse concrète. La manipulation semble effectivement avoir permis à certains élèves de comprendre la notion d'écart constant, et comprendre cette dernière semble leur avoir permis de résoudre des opérations sans erreurs. En revanche, le fait que les autres élèves de la classe aient également amélioré leur performance tend à nuancer ce constat.

Si je devais répondre à la question posée qui était de savoir si *l'utilisation du matériel peut-elle être un outil de remédiation dans l'apprentissage de la technique traditionnelle de la soustraction avec retenue ?* Ma réponse serait oui. En effet, la manipulation semble avoir joué un rôle important dans les progrès des élèves. Conclure quant à l'impact de la compréhension du concept d'écart constant dans cette progression n'est pas possible : c'est une hypothèse qui ne peut être écartée, mais les résultats obtenus ne me permettent pas de me positionner.

Mener ce travail pendant plus d'un an a été très enrichissant et formateur dans la construction de ma posture de future enseignante. Comprendre les besoins et les difficultés des élèves, réfléchir à la manière de répondre à ces derniers, choisir le matériel le plus adapté aux différentes activités, les mettre en œuvre et constater le progrès des élèves sont autant de situations qui m'ont permis de développer mes compétences professionnelles en termes de gestion de l'hétérogénéité, de gestion du temps, des contraintes matérielles, de l'imprévu, et j'en passe. Les élèves de cette classe ont effectué, pour la plupart, de remarquables progrès, et même si mes hypothèses de départ ne se sont pas confirmées, je pense pouvoir affirmer que cette séquence leur a été utile.

Bibliographie.

ACADEMIE DE GRENOBLE, 2011, *Comparatif des techniques opératoires de la soustraction*, [En ligne], http://www.ac-grenoble.fr/ien.annecy2-est/IMG/pdf/Comparatif_des_techniques_operatoires_de_la_soustraction.pdf. Consulté le 9 février 2021.

BERDONNEAU, C., 2006, *De l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques. Conférence pédagogique au CRDP de Rouen, 7 juin 2006,* [En ligne], http://ecoles.acrouen.fr/circ_dieppe_ouest/outils/maternelle/doc_maternelle/berdonneau02.pdf. Consulté le 10 février 2020.

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y., 1999, La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en didactique des mathématiques,* no1/vol.19, 77-124.

BRISSIAUD, R., 2018, *Instructions Blanquer : Parlons-en !* [En ligne], http://www.cafepedagogique.net/LEXPRESSO/Pages/2018/05/02052018Article636608418596191262.aspx. Consulté le 8 mars 2020.

CHEVALLARD, Y., 1998, *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche anthropologique « Actes du colloque organisé à l'université d'été de La Rochelle du 4 au 11 juillet 1998 »*, Clermont-Ferrand, IREM, [En ligne], http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf. Consulté le 10 mars 2020.

DIRECTION DE L'EVALUATION, DE LA PROSPECTIVE ET DE LA PERFORMANCE, 2020, *Note d'information n°22.33, CEDRE 2008-2014-2019 Mathématiques en fin d'école : des résultats en baisse*.

EDUSCOL, 2020, *Attendus de fin d'année CE1*, [En ligne], https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Attendus_et_reperes_C2-3-4/73/4/04-Maths-CE1-attendus-eduscol_1114734.pdf. Consulté le 26 janvier 2020.

EDUSCOL, 2016, *Repères annuels de progression de cycle 2*, [En ligne], https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Attendus_et_reperes_C2-3-4/75/0/20-Maths-C2-reperes-eduscol_1114750.pdf. Consulté le 26 janvier 2020.

PINEL, N., s.d., *La soustraction posée* [En ligne], https://methodeheuristique.com/page-2/la-soustraction-posee/. Consulté le 15 mars 2020.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, 2020, *Programme du cycle 2* d'après le *BOEN n°31 du 30 juillet 2020*.

MOUNIER, E. et PRIOLET, M., 2016, La programmation des techniques opératoires dans les manuels scolaires de l'école élémentaire. Le cas de l'addition et de la soustraction, *Grand N*, n°98, 5-25.

RINALDI, A.-M., 2013, Mesurer avec une règle cassée pour comprendre la technique usuelle de la soustraction posée, *Grand N*, n°91, 93-119.

SYRYN, C., 2017*, La soustraction au cycle 2 - CE2 : la propriété de conservation des écarts dans l'enseignement de la technique usuelle de la soustraction*, Mémoire de master des métiers de l'enseignement du premier degré, 2e année, académie de Créteil : Université Paris-est Créteil.

TEMPIER, F., 2010, Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2, *Grand N*, n°86, 59-90.

TEMPIER, F., 2017, *Le calcul posé*, [En ligne], http://numerationdecimale.free.fr/index.php?option=com_content&view=article&id=137&Itemid=152. Consulté le 28 octobre 2020.

Annexe : Fiches de préparation des trois séances expérimentales.

Séance n°1
Compétence spécifique : Lorsque l'on effectue une soustraction, on recherche l'écart entre deux nombres.

Place de la séance : 1 sur 3.
Durée approximative : 35 minutes.
Modalités de travail : Collectif – Individuel.
Matériel nécessaire : Par élève → Une bande numérique graduée de 0 à 60 – 20 cubes unités (16 cubes) + Affiche.

Déroulé de la séance

Phase (Durée)	**Matériel Support**	**Modalité de travail**	**Déroulement (Tâche du maître – Activité de l'élève)**	**Remarques – Différenciation - Médiation**
1 (2 min)		Collectif	Présentation du matériel : Les élèves observent et explicite le matériel qui est à leur disposition.	L'enseignant accroche une bande numérique au tableau.
2 (10 min)	Bande numérique Cubes	Individuel Collectif	L'enseignant demande aux élèves de réaliser l'opération *19-12* à l'aide des cubes unités. Il écrit l'opération en ligne au tableau. Après un court temps de manipulation, les élèves doivent obtenir une barre de cube dont le nombre est égal au résultat (7 cubes). L'enseignant demande aux élèves d'expliquer leur procédure, puis vérifie avec eux le résultat : Il construit une barre de 19 cubes, il place cette sur la bande numérique, entre le 0 et le 19. A l'aide des graduations, il retire les 12 premiers cubes : Il ne reste alors que les 7 cubes situés entre le 12 et le 19 : L'enseignant compte ces cubes : Il en reste effectivement 7. L'enseignant demande alors aux élèves d'expliquer ce qu'il a fait : *« Pour trouver la solution de l'opération 19-12, qu'ai-je recherché ? »* Réponse attendue : L'écart entre les deux nombres. L'enseignant invite les élèves à vérifier sur leur bande numérique que la solution de l'opération correspond effectivement à l'écart entre les deux nombres.	
3 (5 min)			L'enseignant demande aux élèves d'effectuer la même manœuvre avec l'opération *27-18*. Une fois que les élèves ont terminé, l'enseignant construit une barre de 9 cubes et vérifie le résultat au tableau.	

4 (15 min)		Individuel	L’enseignant écrit de nouvelles opérations au tableau. Les élèves doivent écrire ces opérations en ligne sur leur ardoise et les résoudre et vérifier leur résultat avec la bande numérique et les cubes. Ils ne peuvent pas poser ces opérations : • 30 – 20 = 10 • 35 – 17 = 18 / 35 – 19 = 16 • 39 – 32 = 7 • 57 – 42 = 15 • 56 – 52 = 4 • 59 – 43 = 16 Les élèves n’effacent pas leurs résultats, une correction collective est effectuée à la fin.	L’enseignant va voir chaque élève et leur demande d’expliciter leur procédure. Il est essentiel pour la suite que les élèves assimilent que lorsque l’on recherche le résultat d’une soustraction, on cherche l’écart entre les deux nombres.
5 (5+ min)	Affiche	Collectif	Correction au tableau puis institutionnalisation. Les élèves expliquent avec leurs mots ce qu’ils ont retenue de l’activité d’aujourd’hui puis création d’un affichage : *« Le résultat d’une soustraction peut être obtenu en cherchant l’écart entre les deux nombres. Pour cela, nous pouvons utiliser une bande numérique ».*	

Séance n°2
Compétence spécifique : Si on ajoute la même valeur à chaque nombre d’une soustraction, le résultat reste inchangé : C’est l’écart constant.

Place de la séance : 2 sur 3.
Durée approximative : 45 – 50 minutes.
Modalités de travail : Collectif – Individuel.
Matériel nécessaire : Par élève → Une bande numérique graduée de 0 à 60 – 20 cubes unités + Affiche séance précédente, affiche vierge, fiche opérations.

Déroulé de la séance

Phase (Durée)	**Matériel Support**	**Modalité de travail**	**Déroulement (Tâche du maître – Activité de l’élève)**	**Remarques – Différenciation - Médiation**
1 (5 min)	Bande numérique Cubes	Collectif	L’enseignant demande aux élèves de rappeler l’objet de la séance précédente, puis accroche l’affiche crée à la séance précédente. A la manière de la fois dernière, il demande aux élèves de résoudre l’opération *25 – 19* et de vérifier leur résultat sur la bande numérique à l’aide de la barre de 6 cubes.	L’enseignant accroche une bande numérique au tableau.
2 (5 min)		Individuel Collectif	L’enseignant demande alors aux élèves de trouver à l’aide de cette barre et de la bande numérique et <u>sans poser</u>, une autre opération qui a le même résultat.	

			Après un court temps de réflexion, les élèves énoncent à tour de rôle l'opération qu'ils ont trouvé. L'enseignant vérifie sur sa bande numérique, et inscrit au fur et à mesure les opérations sur le tableau, en dessous ou au-dessus de la première, en les organisant par ordre croissant.	
3 (10 min)		Collectif	Une fois toutes les opérations inscrites au tableau, l'enseignant demande aux élèves de les observer attentivement, les différentes opérations, puis d'émettre des remarques. Réponse attendue : D'une opération à l'autre, la même valeur a été ajoutée aux deux nombres. Cette notion étant difficile à concevoir pour les élèves, il y a de fortes chances pour que l'enseignant doive guider les élèves par des questions inductrices : - « *A votre avis, pourquoi ai-je rangé les opérations dans cet ordre ?* » - « *Quel est le lien entre les différentes opérations ?* » Si après ces questions, les élèves ne trouvent toujours pas la réponse attendue, l'enseignant pourra aider encore plus en indiquant par exemple « *Ici, pour passer de 25 à 28, combien j'ajoute ?* », etc. Les liens entre les opérations sont identifiés et inscrit au tableau.	L'enseignant insiste fortement dans son propos : « On ajoute de chaque côté la même valeur, ce qui permet de ne pas changer l'écart entre les deux nombres ».
4 (10 min)		Collectif Individuel	**<u>Expérimentation de cette nouvelle notion.</u>** (Chaque étape est écrite au tableau). Les élèves résolvent l'opération *15 – 10* et construisent une barre de 5 cubes. L'enseignant leur demande alors d'ajouter mentalement 2 à chaque nombre, ce qui donne l'opération *17 – 12*. Il invite alors les élèves à vérifier sur la bande numérique que l'écart entre les nombres, et donc le résultat est toujours identique, comme cela vient d'être déterminé. On repart de l'opération *15 – 10* à laquelle on retire 5 à chaque nombre, ce qui donne *10 – 5*. On vérifie que le résultat est effectivement identique. Dernière étape : Fonctionne également si on ajoute des plus grands nombres : 15 – 10 auquel on ajoute 20 à chaque nombre, ce qui donne 35 – 30. Le résultat est vérifié. Conclusion : Cela semble fonctionner à chaque fois.	
5 (5 min)			Contre-exemple : 15 – 10. On ajoute 2 à 10 et 3 à 15, ce qui donne l'opération 18 – 12. On peut déterminer mentalement que le résultat n'est pas identique, mais cela se vérifie également avec la barre de 5 cubes et la bande numérique.	

6 (5 min)	Affiche	Collectif	Un affichage est créé pour reprendre la règle énoncée plus tôt : « *Lorsque l'on ajoute ou que l'on soustrait la même valeur aux deux termes d'une soustraction, l'écart entre les deux nombres reste le même* ». Il sera ajouté à celui de la séance précédente.	
7 (10 min)	Fiche exercice Bande numérique Cubes	Individuel	Les élèves réalisent la fiche d'exercice : Le premier est fait en exemple collectivement, puis les élèves réalisent la suite de la fiche individuellement. Elle pourra permettre de constater si les élèves ont intégré ou non la notion d'écart constant.	

Séance n°3
Compétence spécifique : Savoir poser une soustraction avec retenue.

Place de la séance : 3 sur 3.
Durée approximative : 50 minutes
Modalités de travail : Binôme – Collectif
Matériel nécessaire : Par élève → Bande graduée de 90 à 150, 32 cubes unités, 22 barres dizaines, 2 plaques centaines, tableau de numération plastifié (MCDU) + Affiches S1 et S2, affiche vierge.

Déroulé de la séance

Phase (Durée)	**Matériel Support**	**Modalité de travail**	**Déroulement (Tâche du maître – Activité de l'élève)**	**Remarques – Différenciation - Médiation**
1 (2 min)	Affiches	Collectif	Rappel des séances précédentes : - Le résultat d'une soustraction peut être obtenu en recherchant l'écart entre les deux nombres. - Si on ajoute ou enlève la même valeur aux deux termes d'une soustraction, l'écart entre les nombres reste le même.	
2 (5 min)	Bande numérique Matériel multibase Tableau de numération	Collectif	L'enseignant demande aux élèves de poser l'opération *149 – 142* = 7 dans leur tableau de numération, puis de remplacer chaque chiffre par sa correspondance avec le matériel base 10. Les étapes de la résolution de la soustraction sont décomposées et explicitées avec le matériel : « *Que fait-on en premier lorsque l'on résout une soustraction ? On soustrait les unités. Il nous faut alors retirer 2 à 9, ce qui me fait 7 unités. Je place donc 7 cubes dans*	18 cubes unités 8 barres dizaines 2 plaques centaines

			la colonne des unités du résultat », etc. Les différentes étapes sont réalisées simultanément au tableau par l'enseignant, avec des images de matériel base 10. A la fin de la manipulation, les élèves obtiennent le résultat de 7 unités. Ce dernier peut être vérifié sur la bande numérique en plaçant la barre de 7 unités entre le 142 et le 149. L'enseignant transcrit l'opération avec des chiffres au tableau.	
3 (5 min)			Opération *143 – 137 (retenue).* L'enseignant demande aux élèves de réaliser l'opération sur le tableau de numération avec le matériel, puis de retranscrire cette opération avec des chiffres sur leur ardoise. Comparaison des résultats et explicitation des procédures. Les élèves qui n'ont pas ou mal utilisé la retenue n'ont pas le bon résultat. Cela est facilement vérifiable sur la bande numérique.	26 cubes unités 8 barres dizaines 2 plaques centaines
4 (10 min)			Rappel de l'algorithme au tableau : *« Lorsque l'on ne peut pas réaliser la soustraction des deux unités de même rang, on ajoute une retenue sur l'unité du nombre du haut, puis une seconde en diagonale sur le nombre du bas »* *Combien vaut cette retenue ?* Réponse attendue : 10 en haut, 1 en bas. *Pourquoi ?* *« Dans notre exemple, on ne peut pas « retirer » 7 cubes à 3. On met alors une retenue pour augmenter le « 3 ». Nous décidons d'ajouter 10 unités à 3 pour former 13 unités. Nous ajoutons toujours 10. »* L'enseignant montre aux élèves qu'il ne serait pas possible d'augmenter d'une seule unité, car il serait toujours impossible de retirer 7. Nous avons vu précédemment que lorsque l'on fait une soustraction, si l'on veut conserver l'écart entre les deux nombres, il faut ajouter la même valeur en haut et en bas : Il faut donc également ajouter 10 en bas. » L'enseignant effectue les manipulations au tableau en même temps que ses explications. « Si j'ajoute 10 unités en bas, que se passe-t-il ? » L'enseignant ajoute 10 unités au 7 déjà présentes, ce qui donne 17 unités : Le problème n'est pas résolu, on ne peut toujours pas retirer 17 unités à 13 unités. « Or, puisque 10 unités sont égales à 1 dizaine, j'échange ces 10 unités que j'ai ajouté en bas contre 1 dizaine, que je place alors dans la colonne des dizaines. » Cela permet alors de résoudre la soustraction : 13 – 7 = 6 ; 4 – 4 = 0 et 1 – 1 = 0. Le résultat est 6. Nous pouvons vérifier sur la bande numérique que le résultat est correct. L'enseignant transcrit cette opération pour modéliser son fonctionnement.	

			Au moment d'ajouter la retenue, l'enseignant fait remarquer aux élèves que celle-ci s'écrit « 1 », même si nous venons de voir qu'elle vaut 10 unités. Nous savons qu'il s'agit d'1 « paquet » de 10 unités que nous avons ajouté aux unités déjà présentes. Pour le nombre du bas, nous avons « échangé » ce paquet de 10 unités contre une seule dizaine que nous avons ajoutée dans la colonne adéquate.	
5 (5 min)			Pour s'assurer de la compréhension, les élèves vont donc résoudre et modéliser la soustraction : *134 – 126 = 8*.	28 cubes unités 6 barres dizaines 2 plaques centaines
6 (5 min)			L'enseignant demande aux élèves de résoudre l'opération 112 – 91, toujours à l'aide du matériel. Dans cette opération, la retenue se situe sur le chiffre des dizaines, il ne faut donc pas ajouter 10 unités, mais bien 10 dizaines, puis une centaine. L'enseignant laisse un temps de recherche aux élèves, explique la démarche, puis généralise : Lorsque l'on ajoute une retenue, on augmente le nombre de dix unités pour le rang souhaité, puis on ajoute une unité de rang supérieur de manière à conserver l'écart.	4 cubes unités 22 barres dizaines 2 plaques centaines
7 (5 min)			Phase d'institutionnalisation. Le fonctionnement pour les retenues est toujours le même, on ajoute « un paquet de 10 » au chiffre que l'on a besoin d'augmenter pour poursuivre l'opération. On répercute cette augmentation en bas pour conserver l'écart, mais on ne l'ajoute pas dans la même colonne sinon cela ne fonctionne pas : On le met dans la colonne supérieure, dans laquelle ce paquet ne vaut plus que 1, puisque 10 unités d'un rang donné = 1 unité de rang supérieur. Il est important de préciser aux élèves que cela fonctionne de la même manière pour tous les rangs : Unités, dizaines, centaines, milliers, etc. Un affichage est créé, et ajouté aux précédents.	
8 (10 min)			L'enseignant donne aux élèves des opérations à résoudre : - 546 – 239 - 1234 – 173 - 5178 – 2856 L'objectif ici est de faire en sorte que les élèves s'éloignent du matériel.	